教师招聘笔试

数学学科备考手册

华图教师

CONTENTS

目 录

第一模块　考情分析

一、考试内容分析

在各省份的教师招聘数学笔试中，主要集中是对于数学专业知识和数学教学知识的考查。其中数学专业知识部分在试卷中占据比重较大，知识点涉及范围较广，其中包括初高中所涉及到的方程与不等式，函数，三角函数，数列，平面几何，立体几何，解析几何，统计与概率，另外还有大学数学所涉及到的极限，导数，积分，线性代数。数学教学知识包括数学课程标准，数学思想，数学教学方法等。

二、备考策略

在数学笔试中涉及到的知识点非常多，出题形式灵活，这些都给考生复习备考造成困难，因此对于数学专业知识备考可以分为以下几个阶段：

(一)研究考纲阶段

该阶段的任务是考生对报考省份的数学考试内容范围了解清楚，根据考纲要求梳理出各部分知识在笔试中所占的比重。另外可以根据真题要求进行自我摸底测试，明确自身的实际情况与考试要求的差距。接下来考生可以结合自身的情况，制定复习计划。

(二)基础知识梳理

在此阶段，各位考生应当以梳理知识点为主并配合做对应专题的习题。这样可以巩固所复习的知识同时也提高运算的准确性和高效性。建议考生每一专题复习结束后用思维导图将各模块知识之间建立联系，另外对于错题难题进行分类整理并分析原因。因为第二阶段在复习中最为关键，持续的时间也较长，为了更加高效地学习掌握知识和做题方法，考生可以选择有系统教研的辅导班来帮助自己。

(三)综合练习阶段

在第二阶段全面复习结束后就应该做一些综合考点的题目，这部分题目主要的考查题型为解答题，案例分析及教学设计。在复习备考的解答题综合练习阶段需要着重复习函数，三角函数，数列，平面几何，立体几何，解析几何，概率。另外对于案例分析和教学设计也可以分类型进行练习，掌握常规出题类型。综合练习阶段是一个将知识内化并综合应用的阶段，因此考生应该多分析，多总结答题思路和答题方法。

(四)模拟考试阶段

基础复习之后，考生可以按照历年真题要求进行实战演练。建议考试最好能够尽可能逼真地模拟考试情境的各个方面，其中包括考试过程中做题顺序和每个题型时间的安排。在考试前一天考生尽量调整作息时间以保证在考场上呈现最佳水平。

第二模块　高频知识点汇总

一、方程与不等式

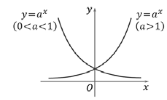
- 方程不等式
  - 方程
    - 一元二次方程
      - $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$
      - 求解
        - 直接开方
        - 配方法
        - 公式法
          - $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
        - 因式分解法
      - 判别式
        - $\Delta=b^2-4ac$
      - 韦达定理
        - $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$
    - 二元一次方程组
      - 代入消元法
      - 加减消元法
    - 分式方程
    - 无理方程
  - 不等式
    - 不等式的性质
      - 基本性质
      - 运算性质
    - 均值不等式
      - $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}(a>0，b>0)$
    - 不等式的解法
      - 一元一次不等式
      - 一元二次不等式
      - 分式不等式
        - $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geq 0\\ g(x)\neq 0\end{cases}$
        - $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$
      - 含有绝对值的不等式
    - 不等式的证明
      - 比较法：做差，做商
      - 综合法
      - 分析法
    - 线性规划
      - $\begin{cases}x-y+2\leq 0\\ x\geq 1\\ x+y-7\leq 0\end{cases}$，$\dfrac{y}{x}$
      - $\begin{cases}x+2y-5\geq 0\\ 2x+y-7\geq 0，z=3x+4y\text{最小值}\\ x\geq 0, y\geq 0\end{cases}$

二、函数

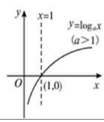
- 函数的概念
  - 映射
    - 一对一；多对一
    - 原象，象
  - 函数定义域
    - 分式
    - 偶次方根
    - 对数函数的真数部分
    - 0的零次幂
  - 函数值域求解方法
    - 图像法
    - 配方法
    - 分离常数法
    - 基本不等式
    - 单调性
  - 函数解析式
    - 待定系数法
    - 解方程组法
    - 凑配法
    - 换元法
    - 特殊值法

- 函数的性质
  - 单调性
    - 定义法
    - 导数法
    - 图像法
    - 复合函数同增异减法
  - 奇偶性
    - 奇函数
      - $f(-x)=-f(x)$
      - 关于原点对称
      - $f(0)=0$
    - 偶函数
      - $f(-x)=f(x)$
      - 关于y轴对称
    - 复杂函数奇偶性的判定
      - 同偶异奇
  - 周期性
    - $f(x+a)=f(x-a)$，$T=2a$
    - 函数关于x=a对称
      - $f(a-x)=f(a+x)$

- 函数的图像
  - 一次函数
  - 反比例函数
  - 指数函数

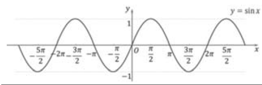
    - **a>1** 第一象限a越大越靠近y轴
    - **0<a<1** 第二象限a越小越靠近y轴
    - $a^r\cdot a^s=a^{r+s}\left(a，r，s\in\mathbf{R}，a>0\right)$
    - $\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}\left(a，r，s\in\mathbf{R}，a>0\right)$
  - 对数函数

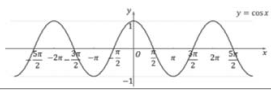
    

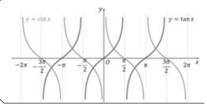
    - $\log_a MN=\log_a M+\log_a N(a，M，N>0，a\neq 0)$
    - $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}(a,b,x>0,a\neq 1)$
    - $a^{\log_a x}=x=\log_a a^x(a,x>0,a\neq 1)$
  - 二次函数
    - 方程
      - $y=ax^2+bx+c$
      - $y=a(x-h)^2+k$
      - $y=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$
    - 图像特征
      - 对称轴 顶点 $(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$
      - 与x轴交点
      - 特殊点 $f\left(0\right)=c$；$f\left(1\right)=a+b+c$；$f\left(-1\right)a-b+c$
  - 幂函数
    - $y=x^\alpha$前面的系数必须是1
  - 反函数
    - （1）互为反函数的两个函数的图象关于直线 **$y=x$** 对称；
    - （2）函数存在反函数的充要条件是，函数的定义域与值域是一一映射；
    - （3）一个函数与它的反函数在相应区间上单调性一致；
    - （4）反函数是相互的；
    - （5）定义域、值域相反，对应法则互逆（三反）。

三、三角函数

- 三角函数
  - 图像







  - 诱导公式
    - $\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\alpha\right)=\begin{cases}\pm\cos\alpha & k\text{为奇数}\\ \pm\sin\alpha & k\text{为偶数}\end{cases}$
    - $\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\alpha\right)=\begin{cases}\pm\sin\alpha & k\text{为奇数}\\ \pm\cos\alpha & k\text{为偶数}\end{cases}$
    - $\tan\left(\frac{k\pi}{2}+\alpha\right)=\begin{cases}\pm\cot\alpha & k\text{为奇数}\\ \pm\tan\alpha & k\text{为偶数}\end{cases}$
  - 计算公式
    - 和差公式
      - $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$
      - $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
      - $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
    - 倍角公式
      - $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\qquad\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
      - $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
  - 解三角形
    - $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$
    - $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

四、数列

- 数列
  - 等差数列
    - 通项公式
      - $a_n = a_1 + (n-1)d$
      - 累加法
    - 前n项和
      - $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n^2}{2}d + (a_1 - \frac{1}{2}d)n$
    - 补充性质
      - 若$m+n=p+q$则$a_m + a_n = a_p + a_q$
      - 若a_n为等差数列，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$也成等差数列，且公差为n^2d
      - $a_m - a_n = (m-n)d$
  - 等比数列
    - 通项公式
      - $a_n = a_1 q^{n-1}$
      - 累乘法
    - 前n项和
      - $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}, q \neq 1$
      - $S_n = na_1 (q=1)$
    - 补充性质
      - 1.$a_m / a_n = q^{m-n}$,a_m和a_n为第m,n项；若$m+n=p+q$,则$a_m \cdot a_n = a_q \cdot a_p$
      - 2.下标成等差数列的项成等比数列；例:$\{a_1,a_5,a_9,a_{13}\cdots\cdots\}$
      - 3.若三个数等比，常设a/q，a，aq；
      - 4.等比数列a,b,c成等比数列，则$b^2 = ac$。b称为等比中项
      - 5.$S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$是等比数列,且公比为$q^n$
  - 特殊数列
    - 求通项的方法
      - 累加法
        - $a_{n+1} = a_n + f(n)$
      - 累乘法
        - $a_{n+1} = a_n f(n)$
      - 公式法
        - $a_n = \begin{cases} S_1 & n=1 \\ S_n - S_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$
      - 构造法
        - $a_{n+1} = pa_n + f(n)$
    - 求和方法
      - 公式法
      - 裂项相消法
        - $\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k})$
        - $\frac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}} = \frac{1}{k}(\sqrt{n+k} - \sqrt{n})$
      - 错位相消法
      - 分组求和法

五、平面几何

- 线与角
  - 线
    - 直线公理：经过两个点有且只有一条直线。
    - 线段性质：所有连接两点的线中，线段最短。
    - 垂直平分线定理：线段垂直平分线上的点和这条线段两个端点的距离相等。
    - 垂直平分线逆定理：和一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上。
  - 角
    - 分类：平角、钝角、锐角、补角
    - 角平分线
      - ①角平分线上的点到这个角的两边的距离相等。
      - ②到一个角的两边距离相等的点在这个角的平分线上。
  - 相交线
    - 邻补角互补，对顶角相等。
    - 垂直
      - 性质1：过一点有且只有一条直线与已知直线垂直。
      - 性质2：直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短。
  - 平行线
    - 平行公理
      - 经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行。
    - 判定定理
      - ①同位角相等，两直线平行。
      - ②内错角相等，两直线平行。
      - ③同旁内角互补，两直线平行。
      - 平行于同一条直线的两直线平行。
      - 垂直于同一条直线的两直线平行。
    - 性质定理
      - 两条平行直线被第三条直线所截，那么
      - ①两直线平行，同位角相等。
      - ②两直线平行，内错角相等。
      - ③两直线平行，同旁内角互补。

- 三角形
  - 边长
    - 三角形的两边之和大于第三边，三角形的两边之差小于第三边。
  - 角
    - 三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和。
    - 三角形三个内角和等于180° 。
  - 中位线
    - 三角形中位线定理：三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半。
    - 结论1：三条中位线组成一个三角形，其周长为原三角形周长的一半。
    - 结论2：三条中位线将原三角形分割成四个全等的三角形。
    - 结论3：三条中位线将原三角形划分出三个面积相等的平行四边形。
    - 结论4：三角形一条中线和与它相交的中位线互相平分。
    - 结论5：三角形中任意两条中位线的夹角与这夹角所对的三角形的顶角相等。
  - 四心
    - 外心：外接圆的圆心，垂直平分线的交点。
    - 内心：内切圆的圆心，角平分线的交点。
    - 垂心：三条高线的交点。
    - 重心：三条中线的交点,把每条中线均分为2:1。
  - 特殊三角形
    - 直角三角形
      - 判定方法1：有一个角是直角的三角形是直角三角形。
      - 判定方法2：如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形。
      - 判定方法3：勾股定理的逆定理。
    - 等腰三角形
      - 等边对等角
      - 三线合一
    - 等边三角形
      - 有一个角是60° 的等腰三角形是等边三角形。

- 四边形
  - 平行四边形
    - 性质定理
      - 平行四边形的邻角互补，对角相等。
      - 平行四边形的对边平行且相等。
      - 平行四边形的对角线互相平分。
    - 判定定理
      - 两组对角分别相等的四边形是平行四边形。
      - 定理2：两组对边分别相等的四边形是平行四边形。
      - 定理3：对角线互相平分的四边形是平行四边形。
      - 定理4：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形。
  - 矩形
    - 性质定理
      - ①具有平行四边形的一切性质。
      - ②矩形的四个角都是直角。
      - ③矩形的对角线相等。
      - ④矩形是轴对称图形。
  - 菱形
    - 性质定理
      - ①具有平行四边形的一切性质。
      - ②菱形的四条边相等。
      - ③菱形的对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角。
      - ④菱形是轴对称图形。
  - 正方形
    - 证明顺序
      - 先证明它是平行四边形；
      - 再证明它是菱形（或矩形）；
      - 最后证明它是矩形（或菱形）。
  - 梯形
    - 等腰梯形
      - ①等腰梯形的两腰相等，两底平行。
      - ②等腰梯形的对角线相等。
      - ③等腰梯形是轴对称图形，它只有一条对称轴，即两底的垂直平分线。
    - 直角梯形
      - 一腰垂直于底的梯形叫做直角梯形。

- 圆
  - 相关概念
    - 优弧，劣弧，弦，弦心距，圆心角，圆周角
  - 与圆相关的定理
    - 垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧。
    - 在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等。
    - 圆周角定理：一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半。
    - 如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形。
  - 弧长与扇形的面积
    - $S_{扇形}=\frac{n}{360}\pi R^2=\frac{1}{2}lR$
    - $l=\frac{n\pi R}{180}$
    - $S=\frac{1}{2}a\cdot 2\pi r=\pi ra$
  - 圆的位置关系
    - 点与圆的位置关系
      - 圆内，圆上，圆外
    - 直线与圆的位置关系
      - 切线的判定定理：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线。
      - 相交，相切，相离
    - 圆与圆的位置关系
      - 外离 $\Leftrightarrow d>R+r$
      - 外切 $\Leftrightarrow d=R+r$
      - 相交 $\Leftrightarrow R-r<d<R+r(R\geq r)$
      - 内切 $\Leftrightarrow d=R-r(R>r)$
      - 内含 $\Leftrightarrow d<R-r(R>r)$
  - 外接圆
    - 圆内接四边形性质（四点共圆的判定条件）：圆内接四边形对角互补。
  - 内切圆
    - 三角形的内切圆的圆心是三角形的三条内角平分线的交点，它叫做三角形的内心。

- 图形变换
  - 平移：把一个图形整体沿某一方向移动，图形的形状和大小不变。
  - 轴对称：把一个图形沿着某条直线折叠，它能够与另一个图形重合。
  - 中心对称：把一个图形绕着某一个点旋转180° ，旋转后的图形能够和原来的图形互相重合。
  - 旋转
    - （1）对应点到旋转中心的距离相等。
    - （2）对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角。

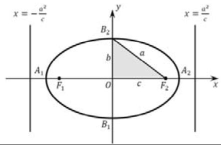
六、立体几何

- 立体几何
  - 公理和定理
    - 公理1：一条直线的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有的点都在这个平面内。这是判断直线在平面内的常用方法。
    - 公理2：如果两个平面有两个公共点，则它们有无数个公共点，而且这无数个公共点都在同一条直线上。
    - 公理3：经过不在同一直线上的三点有且只有一个平面。
    - 三垂线定理：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。
    - 三垂线逆定理：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线，那么它也和这条斜线在平面内的射影垂直。
  - 空间直线的位置关系
    - （1）相交直线——有且只有一个公共点。
    - （2）平行直线——在同一平面内，没有公共点。
    - （3）异面直线——不在同一平面内，也没有公共点。
  - 直线与平面的关系
    - 直线与平面平行关系
      - 判定：$\left.\begin{matrix} a\not\subset\alpha \\ b\subset\alpha \\ a//b \end{matrix}\right\}\Rightarrow a//\alpha$
      - 性质：$\left.\begin{matrix} a//\alpha \\ a\subset\beta \\ \alpha\cap\beta=b \end{matrix}\right\}\Rightarrow a//b$
    - 直线与平面垂直的关系
      - 判定：$\left.\begin{matrix} b\subset\alpha \\ c\subset\alpha \\ b\cap c=A \\ a\perp b \\ a\perp c \end{matrix}\right\} a\perp\alpha$
      - 性质：$\left.\begin{matrix} a\perp\alpha \\ b\perp\alpha \end{matrix}\right\} a//b$
  - 体积与表面积
    - 球的体积：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$
    - 球的表面积：$S=4\pi R^2$
    - 锥体的体积：锥体体积$=\frac{1}{3}\times$底面积$\times$高
  - 平面与平面的关系
    - 平面与平面平行的关系
      - 判定：$\left.\begin{matrix} a\subset\alpha \\ b\subset\alpha \\ a\cap b=A \\ a//\beta \\ b//\beta \end{matrix}\right\}\Rightarrow \alpha//\beta$
      - 性质：$\left.\begin{matrix} \alpha//\beta \\ \alpha\cap\gamma=a \\ \beta\cap\gamma=b \end{matrix}\right\}\Rightarrow a//b$
    - 平面与平面垂直的关系
      - 判定：$\left.\begin{matrix} a\perp\alpha \\ a\subset\beta \end{matrix}\right\}\alpha\perp\beta$
      - 性质：$\left.\begin{matrix} \alpha\perp\beta \\ \alpha\cap\beta=l \\ a\subset\alpha \\ a\perp l \end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp\beta$

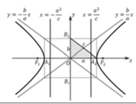
七、解析几何

- 直线与圆
  - 直线
    - 倾斜角与斜率
      - $\tan\theta = k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
    - 直线方程
      - $y - y_0 = k\left(x - x_0\right)$
      - $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
      - $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
      - $Ax + By + C = 0$
    - 点到直线的距离
      - $d = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
    - 平行线之间的距离
      - $d = \dfrac{\left|C_1 - C_2\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
  - 圆的方程
    - $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
    - $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0(D^2 + E^2 - 4F > 0)$
    - $x = r\cos\theta + a$
      $y = r\sin\theta + b$
  - 直线与圆的位置关系
    - $d > r \Leftrightarrow$ 相离 $\Leftrightarrow \Delta < 0$
    - $d = r \Leftrightarrow$ 相切 $\Leftrightarrow \Delta = 0$
    - $d < r \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow \Delta > 0$
  - 圆与圆的位置关系
    - $d > r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 外离 $\Leftrightarrow$ 4条公切线
    - $d = r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 外切 $\Leftrightarrow$ 3条公切线
    - $\left|r_1 - r_2\right| < d < r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow$ 2条公切线
    - $d = \left|r_1 - r_2\right| \Leftrightarrow$ 内切 $\Leftrightarrow$ 1条公切线
    - $0 < d < \left|r_1 - r_2\right| \Leftrightarrow$ 内含 $\Leftrightarrow$ 无公切线

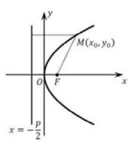
- 圆锥曲线
  - 椭圆

    - 定义
      - 第一定义：$|PF_1|+|PF_2|=2a>|F_1F_2|$
      - 第二定义：$e（0<e<1）$
    - 方程
      - $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
      - $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$
    - 离心率，长轴长，短轴长，准线
    - 焦半径：$|PF_1|=e(x+\frac{a^2}{c})$
  - 双曲线

    - 定义
      - 第一定义：$||PF_1|-|PF_2||=2a<|F_1F_2|$
      - 第二定义：$e(e>1)$
    - 方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$
    - 离心率，长轴长，短轴长，准线
    - 渐近线：$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$ 或 $y=\pm\frac{b}{a}x$
  - 抛物线

    - 定义：到定点与定直线的距离相等的点的轨迹，离心率为1
    - 方程：$y^2=2px\,(p>0)$
    - 焦半径：$|MF|=\frac{p}{2}+x$
    - 过焦点的弦长：$|MN|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=x_1+x_2+p$

八、统计与概率

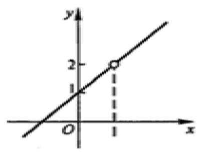
- 统计
  - 统计中的基础概念
    - 平均数：$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)$
    - 众数：在一组数据中，出现次数最多的数据叫做这组数据的众数
    - 中位数：大小排序，最中间的数字或者中间两个数的平均数
    - 方差：$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$
    - 极差：一组数据中最大数据与最小数据的差
    - 频率：一般我们称落在不同小组中的数据个数为该组的频数，频数与总数的比为频率。
  - 抽样
    - 随机抽样
    - 系统抽样：① 编号；② 分段；③ 不确定起始个体编号；④按规则抽取
    - 分层抽样
      - 总体由差异明显的几部分组成
      - 成比例抽取，抽取的比例等于样本客样在总体中的比例
  - 统计图
    - 条形统计图：各种数量的多少
    - 扇形统计图：部分与部分、部分与总体之间的数量关系
    - 折线统计图
      - 表示数量的多少
      - 反映同一事物在不同时间里的数量增减变化的情况
    - 茎叶图

- 概率
  - 确定事件
    - 必然发生的事件：在一定的条件下重复进行试验时，在每次试验中必然会发生的事件。
    - 不可能发生的事件：有的事件在每次试验中都不会发生，这样的事件叫做不可能的事件。
  - 等可能事件的概率：$P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}$
  - 互斥与对立事件的概率
    - 对立事件：$P(A)=1-P(B)$
    - 互斥事件：A和B互斥，则有：$P(A+B)=P(A)+P(B)$
  - 独立重复试验发生k次的概率：$P(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$
  - 离散型随机变量分布列
    - 期望与方差
      - $E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots$　　$E\eta=E(a\xi+b)=aE\xi+b$
      - $D\xi=(x_1-E\xi)^2p_1+(x_2-E\xi)^2p_2+\ldots+(x_n-E\xi)^2p_n+\ldots$　　$D\eta=D(a\xi+b)=a^2D\xi$

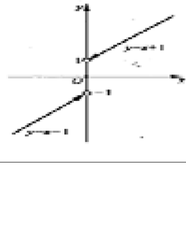
ξ	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

九、高等数学

- 极限与连续
  - 极限
    - 极限存在条件
      - 左极限存在
      - 右极限存在
      - 左极限=右极限
    - 极限四则运算
      - 定理1 有限个无穷小的和也是无穷小。
      - 定理2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小。
    - 求极限方法
      - 代入法
      - 约公因子
      - 最高次幂
        - $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}(当m=n时)\\ 0(当m<n时)\\ \infty(当m>n时)\end{cases}$
      - 两个重要极限
        - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$
        - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
      - 等价无穷小
        - 前提：$x\to 0$
        - $\sin x\sim x$　$\tan x\sim x$　$\arcsin x\sim x$　$\arctan x\sim x$　$e^x-1\sim x$
        - $\ln(1+x)\sim x$　$(1+x)^2-1\sim 2x$　$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$　$a^x-1\sim x\ln a$
      - 洛必达法则
        - $\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty},\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(\infty)\Rightarrow\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A(\infty)$
  - 连续
    - 条件
      - $\lim\limits_{n\to x_0}f(x)=f(x_0)$
    - 间断点
      - 可去间断点



      - 跳跃间断点



      - 无穷间断点
      - 振荡间断点

- 导数与微分
  - 导数及微分
    - 导数的几何意义
    - 连续与可导
      - $f(x)$在点x_0的导数存在$\Leftrightarrow f'_-(x_0)$与$f'_+(x_0)$存在且相等
    - 初等函数求导
      - 常为零；幂降次；指不变；对倒数
      - 正变余；余变正；切割方；割乘切；反分式
    - 四则运算
      - $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
      - $\left[u(x)\cdot v(x)\right]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
    - 复合函数求导
      - $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$
    - 参数函数求导
      - $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$
    - 隐函数求导
      - (1)方程两边分别对x求导；
      - (2)注意$y=y(x)$.
  - 导数的应用
    - 切线方程与法线方程
      - $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$
      - $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$
    - 洛必达法则
    - 单调性、最值、极值
  - 微分
    - 与导数的关系
- 积分
  - 不定积分
    - 原函数与不定积分的关系
      - $\int f(x)dx=F(x)+C$(C为任意常数)
    - 积分公式
    - 求积分方法
      - 第一类
        - $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
      - 第二类
        - $\int\sqrt{1-x^2}dx$
      - 分部积分
        - u的选择顺序：对、反、幂、三、指
  - 定积分及应用
    - 意义及性质
    - 牛顿–莱布尼兹公式
      - $\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a)$
    - 求定积分方法

十、线性代数

- 线性代数
  - 行列式
    - 性质
      - 行列式不变
        - 行列互换
        - 一行的倍数加到另一行
      - 行列式为零
        - 一行为零
        - 两行相同
        - 两行对应成比例
      - 行列式反号
        - 互换两行的位置
    - 计算方法
      - 对角线法
        - $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$
        - 适用于二阶，三阶
      - 化三角形
      - 余子式与代数余子式
  - 矩阵
    - 矩阵的概念
      - 单位矩阵
      - 伴随矩阵
        - $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$
    - 矩阵的运算
      - 加法
      - 乘法
        - $AB = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$
        - A的列数=B的行数
    - 矩阵的初等变换
      - 用非零常数乘矩阵的某一行（列）$(k \times i)$;
      - 互换矩阵某两行（列）的位置$(i \leftrightarrow j)$
      - 把某行（列）的倍加至另一行（列）$(j + k \times i)$
    - 矩阵的秩
      - 初等变换法
      - 最高阶非零子式的阶数
    - 逆矩阵
      - 伴随矩阵
        - $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^*$
      - 初等行变换
        - $(A \mid E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1})$
    - 解矩阵方程
      - $AX = B \to X = A^{-1}B$
      - $XA = B \to X = BA^{-1}$
      - $AXB = C \to X = A^{-1}CB^{-1}$
  - 方阵的特征值与特征向量
    - 特征值
      - $A\alpha = \lambda\alpha$
      - $\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$
    - 特征向量
      - $(\lambda_i E - A)X = 0$
    - 性质
      - $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
      - 设λ是A的特征值，且α是A属于λ的特征向量，
        - $c\lambda^k$是cA^k的特征值，$cA^k\alpha = c\lambda^k\alpha$;
        - 若A可逆，则$\lambda \neq 0$，且$\dfrac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值，$A^{-1}\alpha = \dfrac{1}{\lambda}\alpha$

十一、数学教学知识

1. 数学是研究**数量关系**和**空间形式**的科学。

2. 数学作为对于客观现象抽象概括而逐渐形成的**科学语言与工具**,不仅是自然科学和技术科学的基础,而且在人文科学与社会科学中发挥着越来越大的作用。

3. 义务教育阶段的数学课程是培养公民素质的基础课程,具有**基础性、普及性和发展性**。

4. 数学课程应致力于实现义务教育阶段的培养目标,要面向全体学生,适应学生个性发展的需要,使得:**人人都能获得良好的数学教育,不同的人在数学上得到不同的发展。**

5. 教学活动是师生**积极参与、交往互动、共同发展**的过程。教师是学习的**组织者、引导者与合作者**。学生学习应当是一个**生动活泼的、主动的和富有个性**的过程。

6. 教师教学应该以学生的**认知发展水平和已有的经验**为基础,面向全体学生,注重启发式和因材施教。

7. 学习评价的主要目的是为了全面了解**学生数学学习的过程和结果,激励学生学习**和**改进教师教学**。

8. 义务教育阶段数学课程的设计,充分考虑本阶段学生数学学习的特点,符合学生的认知规律和心理特征,有利于激发学生的学习兴趣,引发数学思考;充分考虑数学本身的特点,体现数学的实质;在呈现作为知识与技能的数学结果的同时,重视学生已有的经验,使学生体验从实际背景中**抽象出数学问题、构建数学模型、寻求结果、解决问题**的过程。

9. 义务教育阶段数学课程目标分为总目标和学段目标,从**知识技能、数学思考、问题解决、情感态度**等四个方面加以阐述。

10. 数学课程目标包括结果目标和过程目标。结果目标使用“**了解、理解、掌握、运用**”等术语表述,过程目标使用“**经历、体验、探索**”等术语表述。

11. 在数学课程中,应当注重发展学生的**数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力和模型思想。**

12. “综合与实践”是一类**以问题为载体**、以**学生自主参与**为主的学习活动。在学习活动中,学生将综合运用“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”等知识和方法解决问题。

13.**数感**主要是指关于**数与数量、数量关系、运算结果估计**等方面的感悟。建立数感有助于学生理解现实生活中数的意义,理解或表述具体情境中的数量关系。

14. 建立**符号意识**有助于学生理解符号的使用,是**数学表达和进行数学思考**的重要形式。

15. **运算能力**主要是指能够根据**法则和运算律**正确地进行运算的能力。

16. 推理是数学的基本思维方式,也是人们学习和生活中经常使用的思维方式。推理一般包括**合情推理和演绎推理**。

17. **模型思想**的建立是学生体会和理解**数学与外部世界**联系的**基本途径**。

18. **创新意识**的培养是现代数学教育的基本任务，应体现在数学教与学的过程之中。**学生自己发现和提出问题**是创新的基础；**独立思考、学会思考是**创新的核心；**归纳概括得到猜想和规律，并加以验证，**是创新的重要方法。

19. 在数学教学活动中，教师要把基本理念转化为自己的教学行为，处理好**教师讲授与学生自主学习**的关系，注重启发学生积极思考。

20. 数学教学应根据具体的教学内容，注意使学生在获得**间接经验**的同时也能够有机会获得**直接经验**，即从学生实际出发，创设有助于学生自主学习的问题情境，引导学生通过实践、思考、探索、交流等，获得数学的**基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验**，促使学生主动地、富有个性地学习，不断提高**发现问题和提出问题的能力、分析问题和解决问题的能力**。

21. 无论是设计、实施课堂教学方案，还是组织各类教学活动，不仅要重视学生获得知识技能，而且要激发学生的学习兴趣，通过独立思考或者合作交流感悟数学的基本思想，引导学生在参与数学活动的过程中积累基本经验，帮助学生形成**认真勤奋、独立思考、合作交流、反思质疑**等良好的学习习惯。

22. 在基本技能的教学中，不仅要使学生掌握技能操作的程序和步骤，还要使学生理解程序和步骤的**道理。**

23. "知识技能"既是学生发展的**基础性目标**，又是落实"数学思考""问题解决""情感态度"目标的**载体**。

24. 数学思想蕴涵在数学知识形成、发展和应用的过程中，是数学知识和方法在更高层次上的抽象与概括，如抽象、分类、归纳、演绎、模型等。学生在积极参与教学活动的过程中，通过**独立思考、合作交流**，逐步感悟数学思想。

25. 教师在教学设计和实施时应特别关注的几个环节是：问题的选择，问题的展开过程，学生参与的方式，学生的合作交流，活动过程和结果的展示与评价等。

26. 评价结果的呈现应采用定性与定量相结合的方式。第一学段的评价应当以**描述性评价**为主，第二学段采用**描述性评价和等级评价相结合**的方式，第三学段可以采用**描述性评价和等级(或百分制)评价相结合**的方式。

27. 在对学生学习过程进行评价时，应依据"经历、体验、探索"不同层次的要求，采取灵活多样的方法，定性与定量相结合、以**定性评价**为主。

28. **数学教材**为学生的数学学习活动提供了学习主题、基本线索和知识结构，是实现数学课程目标、实施数学教学的**重要资源**。

29. 教材在呈现相应的数学内容与思想方法时，应根据学生的年龄特征与知识积累，在遵循科学性的前提下，采用**逐级递进、螺旋上升**的原则。

30. 学习概念主要有**概念形成**与**概念同化**两种基本形式。

31. 概念之间的关系分为：相容关系和不相容关系。其中相容关系包括同一关系，交叉关系，从属关系，不相容关系包括矛盾关系和对立关系。

第三模块　模拟题

一、数与代数部分

1. 若 $x=2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-\frac{3}{2}ax-a^2=0$ 的一个根，则 a 的值为(　　)。

A. -1 或 4　　B. -1 或 -4　　C. 1 或 -4　　D. 1 或 4

2. 下列各点中，不在不等式 $2x+3y<5$ 表示的平面区域内的点为(　　)。

A. (0,1)　　B. (1,0)　　C. (0,2)　　D. (2,0)

3. 设实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-1\leqslant 0\\x+y-1\leqslant 0\\x\geqslant -1\end{cases}$，则 x^2+y^2 的最大值为(　　)。

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 5

4. 在下列函数中，是奇函数的是(　　)。

A. $y=\cos x$　　B. $y=\sin x$

C. $y=\ln x$　　D. $y=x^2+4$

5. 设函数 $y=f(x)$ 为最小正周期为 π 的奇函数，则 $f(x)$ 可能是(　　)。

A. $f(x)=\sin x$　　B. $f(x)=\tan 2x$

C. $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $f(x)=\sin x\cos x$

6. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{3}{4}$，则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)$ 的值为(　　)。

A. $\frac{1}{8}$　　B. $-\frac{1}{8}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{3}{4}$

7. 函数 $f(x)=2\sin^2x+2\sin x\cos x-1$ 的单调递减区间是(　　)。

A. $\left[\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{7\pi}{8}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$　　B. $\left[\frac{3\pi}{8}+2k\pi,\frac{7\pi}{8}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$

C. $\left[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$　　D. $\left[-\frac{\pi}{8}+2k\pi,\frac{3\pi}{8}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$

8. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n。若 $a_1=1,S_{10}=100$,则公差 d 的值为(　　)。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

9. 一堆钢管,最上层有 3 根,最下层有 25 根,如果是自然堆码,这堆钢管最多能堆(　　)根。

A. 208　　B. 322　　C. 308　　D. 416

10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,首项 $a_1=0$,公差 $d\neq 0$,若 $a_{m-1}+a_{m+1}=a_1+a_2+\cdots+a_{12}$,则 m 的值为(　　)

A. 41　　B. 40　　C. 34　　D. 33

11. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若 $\frac{a_7}{a_4}=2$,则 $\frac{S_{13}}{S_7}$ 的值为(　　)

A. $\frac{7}{13}$　　B. $\frac{13}{14}$　　C. 2　　D. $\frac{26}{7}$

12. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $S_n=2^{n+1}-k$,则 $k=$(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

13. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,满足 $S_{n+1}=3S_n+2^{n+1}-1(n\in\mathbf{N}^*)$,且满足 a_3-5,a_2+2,a_1-1 成等差数列。

(1)求 a_1 和 a_2 的值;

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【参考答案】

1－5CCDBD　　6－10AABBC　　11－12DD

13. (1) $a_1=1,a_2=5$;(2) $a_n=3^n-2^n$　**【解析】**(1)由 $S_{n+1}=3S_n+2^{n+1}-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 得:$S_2=3S_1+3$,$S_3=3S_2+7$。由 a_3-5,a_2+2,a_1-1 成等差数列得:$2(a_2+2)=a_1+a_3-6$。综上得:$a_1=1$,$a_2=5$。

(2)由 $S_{n+1}=3S_n+2^{n+1}-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 得:$S_n=3S_{n-1}+2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$,作差得:$a_{n+1}=3a_n+2^n$。设 $a_{n+1}+k\cdot 2^{n+1}=3(a_n+k\cdot 2^n)$,得:$k=1$,整理得:$a_{n+1}+2^{n+1}=3(a_n+2^n)$。设 $b_n=a_n+2^n$,得:$b_{n+1}=3b_n$,$b_1=a_1+2=3$,$q=3$,得:$b_n=3^n$,所以 $a_n=3^n-2^n$。

二、图形与几何部分

1. 若顺次连接四边形 $ABCD$ 各边中点所得的四边形是矩形,则四边形 $ABCD$ 一定

是(　　)

A. 对角线相互垂直的四边形　　B. 矩形

C. 对角线相等的四边形　　D. 菱形

2. 顺次连接对角线相等的四边形各边中点所得到的四边形一定是(　　)

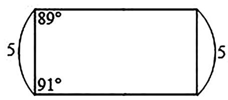
A. 梯形　　B. 矩形　　C. 菱形　　D. 正方形

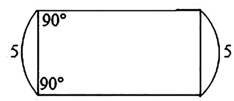
3. 在四边形 $ABCD$ 中,AC,BD 为四边形对角线,$\angle A=\angle B=\angle C=90^{\circ}$,如果添加一个条件,即可推出该四边形是正方形,那么条件可以是(　　)

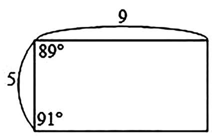
A. $\angle D=90^{\circ}$　　B. $AC=BD$

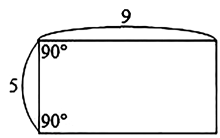
C. $AC\perp BD$　　D. AC,BD 互相平分

4. 下列选项中的四边形只有一个为平行四边形,根据图中所给的边长长度及角度,能得到平行四边形的是(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

5. 半径为 R 的四分之一圆卷成一个圆锥,则它的体积为(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{192}\pi R^{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{64}\pi R^{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{24}\pi R^{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{15}}{8}\pi R^{3}$

6. 若方程 $a^{2}x^{2}+(2a+3)y^{2}+2ax+a=0(a\in \mathrm{R})$ 表示圆,则 a 的取值是(　　)

A. $a=1$ 或 $a=-3$　　B. $a=3$ 或 $a=-1$

C. $a=-1$　　D. $a=3$

7. 方程 $|x|-2=\sqrt{4-y^{2}}$ 表示的曲线是(　　)

A. 两条射线　　B. 两个半圆　　C. 一个圆　　D. 两个圆

8. 下列各组中两个图形不一定相似的是(　　)

A. 有一个角是 35°的两个等腰三角形　　B. 两个等腰直角三角形

C. 有一个角是 120°的两个等腰三角形　　D. 两个等边三角形

9. F_1 是椭圆的左焦点,B 是其短轴的顶点。若 $BF_1=2$,$\angle BF_1O=30^{\circ}$,则该椭圆的方程是(　　)

A. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$　　B. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

C. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$　　D. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

10. 若双曲线的两焦点为 $F_1(0,-4)$，$F_2(0,4)$，双曲线的弦 AB 过点 F_1，若 $\triangle ABF_2$ 的周长为 24，且 $|AB|=8$，那么该双曲线的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　B. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

C. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$　　D. $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{4}=1$

11. 以椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的右焦点为圆心，且与直线 $2x-y+4=0$ 相切的圆的方程是（　　）

A. $x^2+y^2-6x-11=0$　　B. $x^2+y^2+6x-11=0$

C. $x^2+y^2-6x-29=0$　　D. $x^2+y^2+6x-29=0$

12. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，其短轴的一个端点与两个焦点构成的三角形的面积为 $\sqrt{2}$。

(1)求椭圆的方程；

(2)已知动直线 $y=k(x+1)$ 与椭圆 C 交于 A，B 两点，若线段 AB 中点的横坐标为 $-\frac{1}{2}$，求斜率 k 的值。

13. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，A 是抛物线上横坐标为 2 且位于 x 轴上方的点，点 A 到抛物线准线的距离等于 4。

(1)求抛物线的方程；

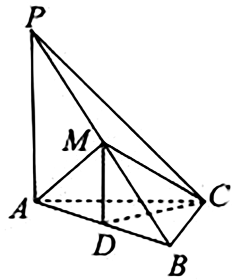
(2)已知点 $Q(-2,0)$，过抛物线焦点的直线 L 交抛物线于 M，N 两点，设直线 QM，QN 的斜率分别为 k_1，k_2，求证 k_1+k_2 为定值。

14. 如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,$PA\perp AC$,$PC\perp BC$,M 为 PB 的中点,D 为 AB 的中点,且 $\triangle AMB$ 为正三角形,$BC=4$,$PB=20$。

(1)求证:$DM\parallel$ 平面 PAC;

(2)求证:平面 $PAC\perp$ 平面 PBC;

(3)求三棱锥 $M-BDC$ 的体积。



【参考答案】

1－5ACCBA　　6－10CBAAC　　11A

12. (1) $\frac{x^2}{3}+y^2=1$;(2) $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】(1)根据题意可得,$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,$\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot b=\sqrt{2}$,解得:$c^2=2$,$a^2=3$,$b^2=1$。故椭圆方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$。

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,将直线 $y=k(x+1)$ 代入椭圆方程中,可得:$\left(k^2+\frac{1}{3}\right)x^2+2k^2x+k^2-1=0$,由韦达定理得:$x_1+x_2=\frac{-6k^2}{3k^2+1}$,则 $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{3k^2}{3k^2+1}=-\frac{1}{2}$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$。

13. (1) $y^2=8x$;(2) $k_1+k_2=0$ 【解析】(1)抛物线 $y^2=2px(p>0)$,准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$,点 A 到抛物线准线的距离为 $2-\left(-\frac{p}{2}\right)=4$,解得:$p=4$,故抛物线方程为 $y^2=8x$。

(2)抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 $(2,0)$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,当直线 l 斜率不存在时,直线 l 的方程为 $x=2$,则直线 l 与抛物线的交点为 $(2,4)$,$(2,-4)$,此时 QM,QN 的斜率为 $k_1=1$,$k_2=-1$ 或 $k_1=-1$,$k_2=1$,所以 $k_1+k_2=0$;当直线 l 斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$,抛物线方程 $y^2=8x$ 的焦点为 $(2,0)$,则过焦点的直线 l 与抛物线交于 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,联立方程 $\begin{cases}y^2=8x\\ y=k(x-2)\end{cases}$,整理得:$k^2x^2-(4k^2+8)x+4k^2=0$,由韦达定理得:$x_1+x_2=$

$\frac{4k^2+8}{k^2}$，$x_1x_2=4$；QM的斜率 $k_1=\frac{y_1}{x_1+2}$，QN的斜率为 $k_2=\frac{y_2}{x_2+2}$，则 $k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{k(x_1-2)}{x_1+2}+\frac{k(x_2-2)}{x_2+2}=\frac{k(2x_1x_2-8)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$，代入 $x_1x_2=4$，可得：$k_1+k_2=0$。综上，k_1+k_2 为定值0。

14.（1）见解析；（2）见解析；（3）$10\sqrt{7}$　**【解析】**（1）证明：因为 M 为 PB 的中点，D 为 AB 的中点，所以 $DM\parallel PA$，又 $DM\notin$ 平面 PAC，所以 $DM\parallel$ 平面 PAC。

（2）证明：$\triangle AMB$ 为正三角形，所以 $DM\perp AB$，又因为 $DM\parallel PA$，所以 $PA\perp AB$，又 $PA\perp AC$，且 $AB\cap AC=A$，所以 $PA\perp$ 平面 ABC，即 $PA\perp BC$，已知 $PC\perp BC$，且 $PA\cap PC=P$，所以 $BC\perp$ 面 PAC，又 $BC\subset$ 平面 PBC，因此平面 $PAC\perp$ 平面 PBC。

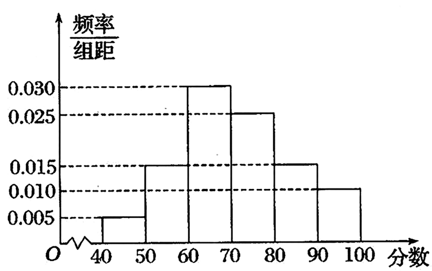
（3）$V_{M-BDC}=\frac{1}{3}DM\cdot S_{\triangle BDC}=\frac{1}{3}DM\cdot\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，由已知 $BC=4$，$PB=20$，则 $DM=MB\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$，$PA=2DM=10\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=2\sqrt{21}$，$V_{M-BDC}=\frac{1}{6}MD\cdot\frac{1}{2}BC\cdot AC=\frac{1}{12}\times5\sqrt{3}\times4\times2\sqrt{21}=10\sqrt{7}$。

三、统计与概率部分

1. 设一组正数 x_1,x_2,x_3,x_4 的方差 $S^2=\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-4)$，则数据 x_1，x_2+1，x_3+1，x_4+2 的平均数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 某校为统计高一年级学生期终考试情况，特从高一年级600名学生中随机抽取部分学生，将他们物理测试成绩分为6组：[40,50)，[50,60)，[60,70)，[70,80)，[80,90)，[90,100)加以统计，如图，估计该物理成绩合格人数为（　　）



A. 388　　B. 480　　C. 450　　D. 120

3. 甲射击命中目标的概率是 $\frac{1}{2}$ ，乙射击命中目标的概率是 $\frac{1}{3}$ ，丙射击命中目标的概率是 $\frac{1}{2}$ ，现在三人同时射击目标，则目标被击中的概率是(　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{1}{12}$

4. 某学校从甲、乙、丙、丁、戊 5 名应聘者中招聘 2 名教师，如果这 5 名应聘者被录用的机会均等，则甲、乙两人中至少有 1 人被录用的概率(　　)

A. $\frac{7}{10}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{10}$

5. 甲、乙两人参加射击游戏，参加游戏的入场费用两人共为 10 元，且每人只能射击一枪。甲射击 A 号靶，每次射中的概率为$\frac{2}{3}$，乙射击 B 号靶，每次射中的概率为$\frac{1}{3}$。游戏规定，如射中 A 号靶则奖励 10 元，否则再交 5 元，如射中 B 号靶则奖励 5 元，否则再交 5 元。设两人最后获得的钱数为 ξ（入场费用计入在内）。

(1)求至少有一人射中的概率；

(2)求钱数 ξ 的分布列及其期望。

【参考答案】

1－4 BBCA

5. (1) $\frac{7}{9}$；(2) 见解析　**【解析】**(1) 设“甲射中”为事件 A，“乙射中”为事件 B，则 $\overline{AB}$ 为“甲乙均未射中”，$P(\overline{AB}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = \left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$ ，所以至少有一人射中的概率为 $P(A+B) = 1-P(\overline{AB}) = 1-\frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ 。

(2) ξ 的所有取值及对应概率如下：

①甲乙均射中，$\xi = 10+5-10 = 5$(元)，$P(\xi = 5) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ ；

②甲射中，乙未射中，$\xi = 10-5-10 = -5$(元)，$P(\xi = -5) = \frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$ ；

③甲未射中，乙射中，$\xi = -5+5-10 = -10$(元)，$P(\xi = -10) = \frac{1}{3}\times$

$\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{9}$；

④甲乙均未射中，$\xi=-5-5-10=-20$(元)，$P(\xi=-20)=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{9}$。

所以获得钱数 ξ 的分布列为

ξ	5	-5	-10	-20
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

获得钱数 ξ 的期望为 $E\xi=5\times\dfrac{2}{9}+(-5)\times\dfrac{4}{9}+(-10)\times\dfrac{1}{9}+(-20)\times\dfrac{2}{9}=-\dfrac{20}{3}$。

四、大学数学部分

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 的值是(　　)

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

2. 由函数 $y=e^x$ 的图像与三条直线 $y=-2x$，$x=1$，$x=3$ 所围成的封闭图形的面积为________。

3. 计算：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=$________。

4. 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，若行列式 $\begin{vmatrix}a & b\\ -1 & 1\end{vmatrix}$ 的值为1，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值是________。

5. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$，则 $AB=$________。

6. 已知函数 $f(x)=x^2+4\ln x$。

(1)求函数 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最大值和最小值；

(2)证明：当 $x\in[1,+\infty]$ 时，函数 $f(x)$ 的图像在函数 $g(x)=2x^3$ 的图像下方。

7. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2}a$（$a$ 为常数），$g(x)=\ln x-(a+1)x$ 。

(1)求函数 $g(x)$ 的单调区间；

(2)设 $F(x)=f(x)+g(x)$，若函数 $F(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 的最小值为 -1，求实数 a 的取值范围。

【参考答案】

1. B　2. e^3-e+8　3. $\frac{1}{2}\ln 2$　4. 4

5. $\begin{pmatrix}-3 & 3 & 1\\ 3 & -4 & 2\\ -1 & 3 & -3\end{pmatrix}$

6. (1) $f(x)_{\min}=1$，$f(x)_{\max}=e^2+4$；(2)见解析 **【解析】**(1)由题意得：$f'(x)=2x+\frac{4}{x}$，当 $x\in[1,e]$ 时，$f'(x)=2x+\frac{4}{x}>0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上为单调递增函数，故 $f(x)_{\min}=f(1)=1$，$f(x)_{\max}=f(e)=e^2+4$。

(2)证明：当 $x\in[1,+\infty]$ 时，函数 $f(x)$ 的图像在函数 $g(x)=2x^3$ 的图像下方，即 $x^2+4\ln x<2x^3$ 在 $[1,+\infty]$ 上恒成立，即 $2x^3-x^2-4\ln x>0$ 在 $[1,+\infty]$ 恒成立。令 $h(x)=2x^3-x^2-4\ln x$，则 $h'(x)=6x^2-2x-\frac{4}{x}=\frac{6x^3-2x^2-4}{x}=\frac{2(x-1)(3x^2+2x+2)}{x}$。当 $x\in[1,+\infty]$ 时，$x-1\geqslant 0$，$3x^2+2x+2>0$ 恒成立，所以 $h'(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $h(x)$ 在 $[1,+\infty]$ 上单调递增，则 $h(x)\geqslant h(1)=1$，故 $h(x)>0$ 恒成立。

7. (1)见解析；(2) $a\geqslant 1$ **【解析】**(1) $g'(x)=\frac{1}{x}-(a+1)$，$x>0$，当 $a+1\leqslant 0$，即 $a\leqslant -1$ 时，在 $(0,+\infty)$ 内 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 单调递增；当 $a+1>0$，即 $a>-1$ 时，在 $\left(0,\frac{1}{a+1}\right)$ 内 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 单调递增；在 $\left(\frac{1}{a+1},+\infty\right)$ 内 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 单调递减。

(2) $F(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2}a+\ln x-(a+1)x$，$x>0$，求导得：$F'(x)=ax+\frac{1}{x}-(a+1)=\frac{ax^2-(a+1)x+1}{x}=\frac{(x-1)(ax-1)}{x}$，因为函数 $F(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 的最小值为 -1，$F(1)=-1$，所以 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上

单调递增，$F'(x)\geqslant 0$，所以 $ax-1\geqslant 0$，即在 $[1,+\infty)$ 内 $a\geqslant \frac{1}{x}$，所以 $a\geqslant 1$。

五、数学教学知识部分

1. 《义务教育数学课程标准(2011 年版)》关于空间观念的主要含义不包括(　　)

A. 想象出物体的方位和相互之间的位置关系

B. 将物体数和形的特征相结合，从而更好地解决问题

C. 描述图形的运动和变化，以及依据语言的描述画出图形

D. 根据物体特征抽象出几何图形和根据几何图形想象出所描述的实际物体

2. 《义务教育数学课程标准(2011 年版)》提出的数学学习总目标是从知识技能、数学思考、问题解决和情感态度四个方面加以阐述的，以下正确的是(　　)

①四个方面密切联系、相互交融；②知识技能和数学思考相对来说更为重要；③数学思考、问题解决和情感态度的发展离不开知识技能的学习；④知识技能的学习必须有利于数学思考、问题解决和情感态度三个目标的实现。

A. ①②③　　B. ①②④　　C. ①③④　　D. ②③④

3. 关于数学推理，以下说法正确的是(　　)

①数学推理包括合情推理和演绎推理；②无论合情推理还是演绎推理所得到的结论都未必正确；③在解决数学问题的过程中，合情推理和演绎推理的功能不同；④推理是数学思维的基本方式。

A. ①②③　　B. ①②④　　C. ①③④　　D. ②③④

4. 某教科书的“一元二次方程”的内容安排顺序大致是从两个具体实例出发，分析与确定实例中的等量关系，用方程描述和刻画事物间的等量关系，归纳、概括方程的共同特征，得到一元二次方程的概念。这种从典型、丰富的具体例子出发，学生经过自己的实践活动，从中归纳、概括出一类事物的共同本质特征，从而理解和掌握概念的方式被称为(　　)

A. 概念形成　　B. 概念固化

C. 概念平衡　　D. 概念类化

5. 《义务教育数学课程标准(2011 年版)》在课程总目标中提出，通过义务教育阶段的数学学习能获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想和(　　)

A. 基本原理　　B. 基本理论

C. 基本活动经验　　D. 基本方法

6. 《义务教育数学课程标准(2011 年版)》指出,数学课程目标包括结果目标和(　　)

A. 知识技能目标　　B. 方法目标

C. 情感态度目标　　D. 过程目标

7. 下列行为属于落实数学思考目标的是(　　)

A. 初步形成评价与反思意识

B. 体会数学特点,了解数学的价值

C. 体会统计方法的意义,发展数据分析观念

D. 经历数与代数的抽象,运算与建模等过程

8. 下列内容属于《义务教育数学课程标准(2011 年版)》第三学段“数与式”的是(　　)

①有理数　②方程　③实数　④代数式　⑤整式与分式

A. ②③④　　B. ①②④⑤　　C. ①③④⑤　　D. ①②③⑤

9. 《义务教育数学课程标准(2011 年版)》指出信息技术的发展对数学的价值目标、内容以及教学方式产生了很大的影响,下列说法正确的是(　　)

A. 现代信息技术可以完全替代原有的教学手段

B. 在应用现代技术时,教师不需要课堂教学板书设计

C. 现代信息技术的真正价值在于实现原有的教学手段,难以达到甚至达不到的效果

D. 现代信息技术的应用不利于培养学生的几何直观

10. 在“两位数乘两位数的笔算乘法”教学中,老师为学生提供了一张 12 行 14 列的点子图,同时要求学生“利用你手中的点子图,在上面圈一圈,画一画,找到解决的办法,并把你的想法和思考过程写在纸上”,这样的教学所渗透的主要数学思想是(　　)

A. 数形结合思想,函数与方程思想

B. 数形结合思想,转化思想

C. 转化思想,函数与方程思想

D. 数形结合思想,分类与整合思想

【参考答案】

1－5BCCAC　　6－10DCCCB