2020年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力(初级中学)
考前冲刺密卷(一)

(科目代码:304)

重要提示

为维护您的个人权益,确保教师资格证考试的公平公正,请您协助我们监督考试实施工作。

本场考试规定:监考老师要向本考场全体考生展示题本密封情况,并邀请2名考生代表验封签字后,方能开启试卷袋。

准考证号________

姓名________

条形码粘贴处

请将此条形码揭下,

贴在答题卡指定位置

注意事项

一、本试卷分满分 150 分，总时限 120 分钟，各部分不单独计时，答题时请注意合理分配时间。

二、请按照要求在答题卡上填写好自己的姓名，涂写好准考证号，严禁折叠答题卡。

三、必须在答题卡上答题；在题本上答题，一律无效。

四、监考人员宣布考试开始时，方可答题；宣布考试结束时，应立即停止答题。题本、答题卡、草稿纸一律留在桌上，待监考人员确认数量无误，允许离开后，方可离开考场。如果违反了以上任何一项要求，都将影响你的成绩。

五、在本套试卷中，可能有些试题较难，因此你不要在一道题上思考时间太久，遇到不会答的题目可先跳过去，如果有时间再去思考，否则，你可能没有时间完成后面的题目。

六、试题答错不倒扣分。

停！请不要往下翻！听候监考老师的指示。
否则，会影响你的成绩。

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案字母按要求涂黑。错选、多选和未选均无分。

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+x^2}\right)^{x^2}$ 的值是（　　）。

A. 0　　　　B. 1

C. e　　　　D. $\dfrac{1}{e}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, x\leqslant 1\\ x^2, x>1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的（　　）。

A. 左右导数都存在

B. 左导数存在，右导数不存在

C. 左导数不存在，右导数存在

D. 左右导数都不存在

3. 求不定积分 $\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x$ 可采用的三角变换是（　　）。

A. $x=a\cos t$　　　　B. $x=a\sin t$

C. $x=a\tan t$　　　　D. $x=a\sec t$

4. 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x$ 所围成平面图形的面积是（　　）。

A. 2　　　　B. $\dfrac{5}{3}$

C. $\dfrac{4}{3}$　　　　D. 1

5. 当 $x>0$ 时，$f(\ln x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，则 $\int_{-2}^{2}xf'(x)\mathrm{d}x=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{e}$　　　　B. $\dfrac{2}{e}$

C. $\dfrac{3}{e}$　　　　D. $\dfrac{4}{e}$

6. $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 存在且连续与 $f(x,y)$ 在该点可微分的关系是（　　）。

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 不存在联系

7. 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一般项趋于零（即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$）是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的（　　）。

A. 充分条件　　　　B. 必要条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

8. 世界上第一个把 π 计算到 $3.1415926<\pi<3.1415927$ 的数学家是(　　)。

A. 刘徽　　B. 祖冲之

C. 阿基米德　　D. 卡瓦列里

二、简答题(本大题共 5 小题,每小题 7 分,共 35 分)

9. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵,证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值。

10. 直线 $y=x$ 将椭圆 $x^2+3y^2=6y$ 分为两块,设小块面积为 A,大块面积为 B,求 $\frac{A}{B}$ 的值。

11. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$。

12. 浅谈创新意识。

13. 简述课程目标的总目标。

三、解答题(本大题共 1 小题,每题 10 分,共 10 分)

14. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=kx_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2mx_1x_3(m>0)$,其中二次型的矩阵的特征值之和为 1,特征值之积为 -12。

(1)求 k,m;

(2)用正交变换化二次型为标准型,并求所作的正交变换以及对应的正交矩阵。

四、论述题(本大题共 1 题,每题 15 分,共 15 分)

15. "精讲多练与自主建构相结合"是数学教学的基本原则。

(1)简述精讲多练与自主建构相结合教学原则的内涵;

(2)如何有效地应用精讲多练与自主建构相结合的原则进行教学?

五、案例分析题（本大题共 1 题，每题 20 分，共 20 分）

16. 案例：

两个学生分别解答这样一道题，为使方程 $(x-2k)^2+k-1=0$ 有实数解，求 k 的取值范围。第一位同学的解法是：

解：方程可整理为

$x^2-4kx+4k^2+k-1=0$

$\Delta=(-4k)^2-4\times(4k^2+k-1)\times 1$

$=4-4k$

因二次方程有实根条件为 $\Delta\geqslant 0$，即 $4-4k\geqslant 0$，解得 $k\leqslant 1$。

第二位同学的解法是：

解：方程可变形为：$(x-2k)^2=1-k$，"$x-2k$"是"$1-k$"的平方根，根据开平方条件，$1-k\geqslant 0$，解得 $k\leqslant 1$。

【问题】

(1)这两个同学的解法有何不同？

(2)两种解法都侧重哪种数学思想？

(3)如果你是他们的老师，你应该怎样在课堂上评价他们？

六、教学设计题（本大题共 1 题，每题 30 分，共 30 分）

17. 教学课题为“勾股定理”。请你完成下列任务：

(1)简述勾股定理的内容并设计该课题的教学目标和教学重难点；

(2)设计一个问题情境引入该课题，并说明设计意图；

(3)设计新授环节，能够体现新课改中学生为主体的理念。

准考证号________

姓名________

2020年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力(初级中学)
考前冲刺密卷(二)

(科目代码:304)

重要提示

为维护您的个人权益,确保教师资格证考试的公平公正,请您协助我们监督考试实施工作。

本场考试规定:监考老师要向本考场全体考生展示题本密封情况,并邀请2名考生代表验封签字后,方能开启试卷袋。

条形码粘贴处

请将此条形码揭下,

贴在答题卡指定位置

注意事项

一、本试卷分满分 150 分，总时限 120 分钟，各部分不单独计时，答题时请注意合理分配时间。

二、请按照要求在答题卡上填写好自己的姓名，涂写好准考证号，严禁折叠答题卡。

三、必须在答题卡上答题；在题本上答题，一律无效。

四、监考人员宣布考试开始时，方可答题；宣布考试结束时，应立即停止答题。题本、答题卡、草稿纸一律留在桌上，待监考人员确认数量无误，允许离开后，方可离开考场。如果违反了以上任何一项要求，都将影响你的成绩。

五、在本套试卷中，可能有些试题较难，因此你不要在一道题上思考时间太久，遇到不会答的题目可先跳过去，如果有时间再去思考，否则，你可能没有时间完成后面的题目。

六、试题答错不倒扣分。

停！请不要往下翻！听候监考老师的指示。
否则，会影响你的成绩。

一、单项选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的,请用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案字母按要求涂黑。错选、多选和未选均无分。

1. 设 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+x\right)^{2n}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n}x^{2n}$,则

$\lim\limits_{n\to\infty}[(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n})^2-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})^2]=($ $)$。

A. -1

B. 0

C. 1

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是( )。

A. 条件收敛

B. 绝对收敛

C. 发散

D. 无法判断

3. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为( )。

A. $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

4. 通解为 $y=Ce^x$(C 为任意常数)的微分方程为( )。

A. $y'+y=0$

B. $y'-y=0$

C. $y'y=0$

D. $y-y'+1=0$

5. 某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$,则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为( )。

A. $3p(1-p)^2$

B. $6p(1-p)^2$

C. $3p^2(1-p)^2$

D. $6p^2(1-p)^2$

6. 过三点 $P_1=(1,2,-1)$,$P_2=(-1,1,4)$,$P_3=(1,3,-2)$ 的平面方程为( )。

A. $x+2y-z=6$

B. $x-y-4z=6$

C. $2x+y+z=3$

D. $2x-y-z=1$

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1(x<2)\\ 0(x=2)\\ 2+\log_2 x(x>2)\end{cases}$,则有( )。

A. $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续

B. $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上一致连续

C. $x=2$ 是 $f(x)$ 的可去间断点

D. $x=2$ 是 $f(x)$ 的震荡间断点

8. 在现存在中国古代数学著作中，最早的一部是(　　)。

A.《孙子算经》

B.《墨经》

C.《算术书》

D.《周髀算经》

二、简答题(本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分)

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 都是 n 维向量($\boldsymbol{n}\geqslant 3$)，且 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，证明：向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶实矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，已知 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $1,-1,2,-4$，求 $|\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|$。

11. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{e^{-nx}-(x^2+1)}$，求曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-\dfrac{x}{2}$ 所围成平面图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积。

12. 简述合情推理与演绎推理的关系。

13. 列举三种常见的数学概念的定义方法，并举例说明。

三、解答题(本大题共1小题,每题10分,共10分)

14. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导。

(1)叙述并证明一元函数微分学中的拉格朗日中值定理;

(2)若 $f(x)$ 不是一次式也不为常函数,试证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使

$$|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

四、论述题(本大题共1题,每题15分,共15分)

15. 如何把握“综合与实践”的实施?

五、案例分析题（本大题共 1 题，每题 20 分，共 20 分）

16. 案例："一元一次方程"的教学片断

师：如何解方程 $3x-3=-6(x-1)$？

生 1：老师，我还没有开始计算，就看出来了，$x=1$。

师：光看不行，要按要求算出来才算对。

生 2：先两边同时除以 3，再……（被老师打断了）

师：你的想法是对的，但以后要注意，刚学新知识时，记住一定要按照课本的格式和要求来解，这样才能打好基础。

【问题】

(1)请对这位老师的做法进行点评；

(2)关于课堂提问，你认为需要注意什么问题。

六、教学设计题（本大题共 1 题，每题 30 分，共 30 分）

17. 教学课题为“全等三角形”。请你完成下列任务：

(1)设计该课题的教学目标和教学重难点；

(2)设计一个导入引入该课题，并说明设计意图；

(3)设计新授环节，能够体现新课改中学生为主体的理念。

准考证号＿＿＿＿＿＿

姓名＿＿＿＿＿＿

2020 年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力(初级中学)
考前冲刺密卷(三)

(科目代码:304)

重要提示

为维护您的个人权益,确保教师资格证考试的公平公正,请您协助我们监督考试实施工作。

本场考试规定:监考老师要向本考场全体考生展示题本密封情况,并邀请 2 名考生代表验封签字后,方能开启试卷袋。

条形码粘贴处

请将此条形码揭下,

贴在答题卡指定位置

注意事项

一、本试卷分满分 150 分，总时限 120 分钟，各部分不单独计时，答题时请注意合理分配时间。

二、请按照要求在答题卡上填写好自己的姓名，涂写好准考证号，严禁折叠答题卡。

三、必须在答题卡上答题；在题本上答题，一律无效。

四、监考人员宣布考试开始时，方可答题；宣布考试结束时，应立即停止答题。题本、答题卡、草稿纸一律留在桌上，待监考人员确认数量无误，允许离开后，方可离开考场。如果违反了以上任何一项要求，都将影响你的成绩。

五、在本套试卷中，可能有些试题较难，因此你不要在一道题上思考时间太久，遇到不会答的题目可先跳过去，如果有时间再去思考，否则，你可能没有时间完成后面的题目。

六、试题答错不倒扣分。

停！请不要往下翻！听候监考老师的指示。
否则，会影响你的成绩。

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案字母按要求涂黑。错选、多选和未选均无分。

1. 设 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的（　　）。

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　D. 连续点

2. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=\dfrac{1}{3}$，且对于任意的正整数 m,n 都有 $a_{m+n}=a_m\cdot a_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$

C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 2

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 的值为（　　）。

A. $\dfrac{2}{2-\ln 3}$　　B. $\dfrac{2}{\ln 3}$

C. 1　　D. $\ln 3$

4. 微分方程 $y''-4y=\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为（其中 C_1、C_2 为任意常数）（　　）。

A. $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+(C_2+\dfrac{1}{4}x)\mathrm{e}^{-2x}$　　B. $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+(C_2-\dfrac{1}{4}x)\mathrm{e}^{2x}$

C. $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+(C_2+\dfrac{1}{4}x)\mathrm{e}^{2x}$　　D. $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+(C_2-\dfrac{1}{4}x)\mathrm{e}^{-2x}$

5. 平面 $2x-y+z=1$ 与平面 $2x-y+z+6=0$ 的位置关系是（　　）。

A. 平行，但不重合　　B. 重合

C. 垂直　　D. 既不平行也不垂直

6. 设 $f(x)=\dfrac{x}{3-x}$，则曲线 $y=f(x)$（　　）。

A. 仅有水平渐进线　　B. 仅有垂直渐近线

C. 既有水平渐进线又有垂直渐进线　　D. 无渐进线

7. 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，参数 $c=$（　　）。

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

8. 发现著名公式 $\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 的是（　　）。

A. 笛卡尔　　B. 牛顿

C. 莱布尼茨　　D. 欧拉

二、简答题（本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分）

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$，且 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关。

10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$，且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 λ_0，对应于 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}=[-1\quad -1\quad 1]^{\mathrm{T}}$，求 a,b,c 及 λ_0。

11. 求由曲线 $y=\mathrm{e}^x$，$y=\mathrm{e}^{-x}$ 与直线 $x=1$ 所围成的平面图形的面积及这个平面图形绕 x 轴旋转所成旋转体体积。

12. 如何理解在教学过程中存在的“预设”与“生成”之间的关系？

13. 义务教育阶段数学课程的设计思路是什么？具体从哪几方面阐述的？

三、解答题（本大题共 1 小题，每题 10 分，共 10 分）

14. 已知函数 $f(x)=x^3+ax$ 。

(1)当 $x=1$ 时，$f(x)=x^3+ax$ 有极小值，求 a 的值；

(2)若过点 $P(1,1)$ 只有一条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，求 a 的取值范围。

四、论述题(本大题共1题,每题15分,共15分)

15.《义务教育数学课程标准(2011年版)》在教学建议中指出应当恰当地呈现和利用评价结果,论述数学教学中如何理解。

五、案例分析题(本大题共1题,每题20分,共20分)

16. 下面是"有理数的减法法则"一课的教学片段。

问题一:某市某天的气温是$-3^{\circ}\mathrm{C}\sim3^{\circ}\mathrm{C}$,这天的温差(最高气温减最低气温,单位:$^{\circ}\mathrm{C}$)是多少?

这天的温差列式就是$3-(-3)$,由温度计图可以看出这天的温差是$6^{\circ}\mathrm{C}$,所以$3-(-3)=6$。

问题二:要如何计算$3-(-3)$呢?减法是加法的逆运算,计算$3-(-3)$,就是要求出一个数x,使得x与-3相加得3。

因为6与-3相加得3,所以x应该是6,即$3-(-3)=6$①,另一方面,我们知道$3+(+3)=6$②,由①②,有$3-(-3)=3+(+3)$③。

探究一:从③式能看出减-3相当于加哪个数呢?把3换成$0,-1,-5$,用上面的方法试试看。

因为$0-(-3)=3$,$0+(+3)=3$,所以$0-(-3)=0+(+3)$。

因为$(-1)-(-3)=2$,$(-1)+(+3)=2$,所以$(-1)-(-3)=(-1)+(+3)$。

因为$(-5)-(-3)=-2$,$(-5)+(+3)=-2$,所以$(-5)-(-3)=(-5)+(+3)$。

因此,我们得到:减去一个负数,等于加上这个负数的相反数。

探究二:计算下面几对式子看看。

因为 $9-8=1$，$9+(-8)=1$，所以 $9-8=9+(-8)$。

因为 $15-7=8$，$15+(-7)=8$，所以 $15-7=15+(-7)$。

从中有什么发现？

减去一个正数，等于加上这个正数的相反数。

探究三：再计算下面几对式子看看。

因为 $3-0=3$，$3+0=3$，所以 $3-0=3+0$。

因为 $(-5)-0=-5$，$(-5)+0=-5$，所以 $(-5)-0=(-5)+0$。

从中有什么发现？

减去 0 等于加上 0。

由以上探究可以发现，有理数的减法可以转化为加法来进行，有理数减法法则：减去一个数，等于加上这个数的相反数……

【问题】

(1)分析此教学片段落实了哪些数学核心概念；

(2)本片段中有哪些值得借鉴的方面？请说明理由；

(3)谈一谈你对上述教学过程的反思。

六、教学设计题(本大题共1题,每题30分,共30分)

17.《义务教育教学课程标准》关于平行四边形的性质的教学要求是:探索并证明平行四边形的性质定理——平行四边形的对边相等,对角相等。

请基于该要求,结合教材内容,完成下列教学设计任务:

(1)设计平行四边形性质教学目标;

(2)设计两种让学生发现平行四边形性质的教学流程;

(3)设计平行四边形性质证明的教学流程,使学生领悟证明过程中的教学思想方法。

2020年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力(初级中学)考前冲刺密卷

参考答案及解析

·华图教育·

目　录

2020年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力(初级中学)考前冲刺密卷(一)

一、单项选择题

1. C 【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)^{x^2+1}}{\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)}=\mathrm{e}$。故本题选C。

2. B 【解析】$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2}{3}(x^2+x+1)=2$；$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty$，左导数存在，但右导数不存在。故本题选B。

3. D 【解析】根据三角函数中的基本公式：$\sec^2t-1=\tan^2t$，令$x=a\sec t$，则$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{(a\sec t)^2-a^2}}d(a\sec t)=\int\frac{1}{\sqrt{\sec^2t-1}}\sec t\cdot\tan t dt=\int\sec t dt=\ln|\sec t+\tan t|+C=\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right|=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$。故本题选D。

4. C 【解析】根据两个图像可知：所围成平面图形的面积是$S=\int_0^2(2x-x^2)\mathrm{d}x=\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}$。故本题选C。

5. D 【解析】$\because f(\ln x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}=(\mathrm{e}^{\ln x})^{-\frac{1}{2}}$，$\therefore f(x)=(\mathrm{e}^x)^{-\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$，$\int_{-2}^2xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_{-2}^2-\int_{-2}^2f(x)\mathrm{d}x=(x+2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\Big|_{-2}^2=\frac{4}{\mathrm{e}}$。故本题选D。

6. A 【解析】根据可微的充分条件可知，$z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$存在且连续可以推导$f(x,y)$在该点可微分；根据可微的必要条件可知，$f(x,y)$在该点可微分只能推导出偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$存在，不能推导出偏导数连续。故本题选A。

7. B 【解析】根据级数收敛的必要条件：如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则它的一般项$u_n$趋于0，即$\lim\limits_{x\to\infty}u_n=0$。级数的一般项趋于0并不是级数收敛的充分条件，例如调和级数一般项$u_n=\frac{1}{n}$，一般项趋于0，但是调和级数发散。故本题选B。

8. B 【解析】根据数学史可知，世界上第一个把π计算到3.1415926＜π＜3.1415927的数学家是祖冲之。故本题选B。

二、简答题

9．见解析 【解析】设 λ_0 是 $\boldsymbol{AB}$ 的非零特征值，$\boldsymbol{\alpha}_0$ 是 $\boldsymbol{AB}$ 的对应于 λ_0 的特征向量，即 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{\alpha}_0=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}_0(\boldsymbol{\alpha}_0\neq\boldsymbol{0})$，用 $\boldsymbol{B}$ 左乘上式，得 $\boldsymbol{BA}(\boldsymbol{B\alpha}_0)=\lambda_0\boldsymbol{B\alpha}_0(\boldsymbol{\alpha}_0\neq\boldsymbol{0})$，下面需证 $\boldsymbol{B\alpha_0}\neq\boldsymbol{0}$，这样 $\boldsymbol{B\alpha}_0$ 就是矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 的对应于 λ_0 的特征向量。下面利用反证法进行证明：假设 $\boldsymbol{B\alpha}_0=\boldsymbol{0}$，则 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{\alpha}_0=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B\alpha}_0)=\boldsymbol{0}$，这与 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{\alpha}_0=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}_0\neq\boldsymbol{0}$ 相矛盾，所以 λ_0 是 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值。设 $\lambda_0=\boldsymbol{0}$ 是 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值，则 $|0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|=|-\boldsymbol{BA}|=(-1)^n|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=|0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|$，所以 $\lambda_0=0$ 也是 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值。

同理可证 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值也必是 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值，所以 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值。

10．$\dfrac{A}{B}=\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$ 【解析】直线与椭圆的交点为 $(0,0)$，$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，则 $A=\int_0^{\frac{3}{2}}(\sqrt{6y-3y^2}-y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-(y-1)^2}-y\right)\mathrm{d}y=I_1-I_2$，令 $y-1=\sin t$，则 $I_1=\int_0^{\frac{3}{2}}(\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-(y-1)^2})\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\sqrt{3}\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi+\dfrac{3}{8}$，而 $I_2=\int_0^{\frac{3}{2}}y\,\mathrm{d}y=\dfrac{9}{8}$，所以 $A=\dfrac{4\sqrt{3}\pi-9}{12}$，由于椭圆面积为 $\sqrt{3}\pi$，故 $B=\sqrt{3}\pi-\dfrac{4\sqrt{3}\pi-9}{12}=\dfrac{8\sqrt{3}\pi+9}{12}$，从而有 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$。

11．$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$ 【解析】由题意可知，$\boldsymbol{A}$ 可逆，则用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 右乘方程两边，可得：$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，化简整理有：$(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=6(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}$。$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}$，$(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{B}=6(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$。

12.【参考答案】

为了适应时代发展对人才培养的需要，在数学课程中，除了应当注重发展学生的数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力和模型思想，还要特别注重发展学生的应用意识和创新意识。

创新意识的培养是现代数学教育的基本任务，应体现在数学教与学的过程之中，学生自己发现问题和提出问题是创新的基础；独立思考和学会思考是创新的核心；归纳概括得到猜想和规律，并加以验证是创新的重要方法。创新意识的培养应该从义务教育阶段做起，贯穿数学教育的始终。

13.【参考答案】

义务教育阶段课程目标分为总目标和学段目标，总目标是通过义务教育阶段的数学学习，学生能：①获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。②体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，运用数学的思维方

式进行思考，增强发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力。③了解数学的价值，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的信心，养成良好的学习习惯，具有初步的创新意识和科学态度。

总目标主要从知识技能、数学思考、问题解决、情感态度四个方面进行阐述。总目标的这四个方面，不是相互独立和割裂的，而是一个紧密联系、相互交融的有机整体。在课程设计和教学活动组织中，应同时兼顾这四个方面的目标。这些目标的整体实现，是学生受到良好数学教育的标志，它对学生的全面、持续、和谐发展有着重要的意义。数学思考、问题解决、情感态度的发展离不开知识技能的学习，知识技能的学习必须有利于其他三个目标的实现。

三、解答题

14. (1) $k=1,m=2$ **【解析】**二次型 f 的对应矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} k & 0 & m \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & -2 \end{bmatrix}$，设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，由题意可知：$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=k+2-2=1 \\ \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=|\boldsymbol{A}|=-4k-2m^2=-12 \end{cases}$，解得 $k=1,m=\pm2$，已知 $m>0$，所以 $k=1,m=2$。

(2) 正交变换见解析，对应的正交矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ **【解析】**由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)=0$，可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$，所以二次型的标准型为 $2y_1{}^2+2y_2{}^2-3y_3{}^2$。

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$，解得基础解系为 $\xi_1=[0\quad 1\quad 0]^T$，$\xi_2=[2\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$。

当 $\lambda_3=-3$，由 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$，解得基础解系为 $\xi_3=[1\quad 0\quad -2]^{\mathrm{T}}$。因 ξ_1,ξ_2,ξ_3 已两两正交，故只需单位化，得 $\xi_1'=[0\quad 1\quad 0]^{\mathrm{T}}$，$\xi_2'=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\xi_3'=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，则所求的正交矩阵为 $\boldsymbol{Q}=[\xi_1'\quad \xi_2'\quad \xi_3']=\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 即为所求的正交变换，且有：$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\xlongequal{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=$

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=2y_1{}^2+2y_2{}^2-3y_3{}^2。$$

四、论述题

15.**【参考答案】**

(1)精讲多练是当前数学课堂教学的主要做法。精讲,是针对教师讲解提出的,要求教师要精选典型问题作出讲解,对数学概念、定理中的关键点作出精辟讲解。讲解要少而精,要有针对性、代表性、普遍性,不搞一言堂,个别问题做个别教学。多练,是要求学生练习解题必须达到一定的数量。

建构性是数学学科的又一基本特性。所谓建构就是"建立"和"构造",关于新知识认知结构的过程。"建立"一般是从无到有的兴建;"构造",则是对已有资料、结构、框架加以调整、整合或重组。对建构主义来说,更是认为学习是学生依据自己已有的知识经验主动建构的过程;知识不能被动接受,不能被传递,需要学生主动的自我构建其意义,就数学学习而言,有意义的接受学习和有意义的发现学习是数学建构性学习的两个基本过程。

(2)第一,确立学生学习的主体地位。学生是学习的主体,所以在实际教学中,可以通过学生学习的积极性、自主性、探索性、深刻性等方面衡量是否真正确立和发挥了学生学习的主体性。

第二,教师要为学生自主建构而精讲。教师要善于创设数学问题情境,引导学生经历观察、实验、归纳、猜想、验证、应用等建构活动,不搞一言堂,进行民主教学,给学生自主建构留有充分的空间和时间。

第三,注重数学过程教学。正确的运用各项教学原则,有助于我们自觉的按照教学工作的客观规律办事,在教学过程中充分发挥教师的主导作用和学生的主体作用,为全面提高数学教学质量创造条件。

五、案例分析题

16.**【参考答案】**

(1)第一位同学的解法是利用根与判别式关系来求 k 的取值范围,第二位同学的解法比较新颖,利用了平方根以及开平方的约束条件来求解。

(2)方程的思想以及转化的思想。

(3)依据新课标的要求要给予学生激励性评价以及评价的有效性和针对性,应该给予学生鼓励和表扬,同时指出第一位学生的方法是传统的方法,利用判别式 Δ 与 0 的大小关系来求 k 的取值范围,大家都需要掌握这种方法,通用性更加好一些,第二位同学的这种解法比较新颖,利用了平方根开平方的约束条件来求解,明显计算量小很多,是非常值得借鉴和探究的方法。

六、教学设计题

17.**【参考答案】**

(1)勾股定理:

如果直角三角形的两条直角边长分别为 a、b,斜边长为 c,那么 $a^2+b^2=c^2$。

教学目标:

①知识与技能目标:理解并掌握勾股定理及其证明过程。

②过程与方法目标:通过小组互动的学习方式,提高动手操作的能力,通过灵活的运用勾股定理,提高解决实际问题的能力。

③情感态度与价值观目标:通过对勾股定理历史的了解,感受数学文化,增强爱国情操,培养

钻研精神。

教学重难点：

教学重点：掌握勾股定理的证明和运用。

教学难点：理解勾股定理的证明过程。

(2)问题情境导入

在上课之初，通过 PPT 呈现 2002 年在北京召开的国际数学家大会会场情景的的图片，重点抽取会徽图案，询问学生：你能发现它是由什么图形构成的？从而引出“赵爽弦图”。接着提问学生赵爽弦图证明了哪个著名的定理，从而引出本节课的课题——《勾股定理》。

通过这样的导入方法，激发学生强烈的好奇心和求知欲，在观察、思考和交流的过程中让学生对勾股定理有初步的感性认识。为后续学习做铺垫，从而引出新授环节。

(3)探究新知

接下来是新授环节，这一环节我会展开一系列的活动。

首先，我以多媒体图片呈现的方式，介绍毕达哥拉斯发现勾股定理的故事，展示毕达哥拉斯发现、探究勾股定理的过程。提问学生：这三个正方形之间的面积有什么关系？等腰直角三角形三边在数量上有什么关系？

学生借助直观的课件，通过故事中带出的问题，激发了学习兴趣又降低了学生探究的难度，学生间通过观察交流、讨论得出结论：以等腰直角三角形两直角边为边长的小正方形的面积的和，等于以斜边为边长的大正方形的面积，即等腰直角三角形的三边之间有一种特殊的关系：斜边的平方等于两直角边的平方和。从而学生初步具有了勾股定理的雏形。

接着向学生提出，毕达哥拉斯猜想：这一结论是不是所有的直角三角形都具备呢？于是展开了进一步的探索。利用 PPT 课件展示，提出问题，引导学生自主探究，通过练习推导，探究交流，验证猜测。

学生自主探究 PPT 上的问题，给出不同解法，通过交流讨论，归纳出勾股定理命题：如果直角三角形的两条直角边长分别为 a、b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$。

为了加强数学的严谨性，教师引导学生对上述命题进行证明。有学生代表提出刚才欣赏的会徽图形就是我国古代数学家赵爽的“赵爽弦图”，就是对勾股定理命题的严谨论证。从而学生合作交流，参考赵爽的论证，用 4 个全等的直角三角形和一个正方形拼凑图形，通过对图形的切割、拼接、巧妙地利用面积关系证明了勾股定理。体验自主探究学习的乐趣。

2020 年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力(初级中学)考前冲刺密卷(二)

一、单项选择题

1. B 【解析】∵令 $x=1$ 时，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^{2n}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}$；令 $x=-1$ 时，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^{2n}=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{2n-1}+a_{2n}$；∴ $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^{2n}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^{2n}}{2}$；$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^{2n}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^{2n}}{2}$；代入原式可得

$\lim\limits_{n\to\infty}[(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n})^2-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})^2]=0$。故本题选 B。

2. A 【解析】若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛。因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是条件收敛。故本题选 A。

3. A 【解析】因为矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{1\times4-2\times3}&\frac{-2}{1\times4-3\times2}\\\frac{-3}{1\times4-2\times3}&\frac{1}{1\times4-2\times3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，故本题选 A。

4. B 【解析】因为 $y'-y=0$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y$，$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\mathrm{d}x$，两边积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\mathrm{d}x$，$\therefore\ln|y|=x+C$，所以通解为 $y=Ce^x$。故本题选 B。

5. C 【解析】事件 A＝“第 4 次射击恰好第 2 次命中目标”表示共射击 4 次，其中前 3 次只有一次击中目标，且第 4 次击中目标，因此 $P(A)=C_3^1p(1-p)^2\cdot p=3p^2(1-p)^2$。故本题选 C。

6. C 【解析】根据三点 $P_1=(1,2,-1)$，$P_2=(-1,1,4)$，$P_3=(1,3,-2)$ 不共线可得 $\overrightarrow{P_1P_2}=(-2,-1,5)$，$\overrightarrow{P_1P_3}=(0,1,-1)$，平面的法线向量为两个向量的叉乘 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-2&-1&5\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}=(-4,-2,-2)$。因此根据平面点法式可表示为 $-4(x-1)-2(y-2)-2(z+1)=0$，化简可得 $2x+y+z=3$。故本题选 C。

7. C 【解析】由于 $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(2x-1)=3$，$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(2+\log_2x)=3$，因此，$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)\neq f(2)$，故函数在 $x=2$ 处存在极限但极限值不等于函数值，因此在点 $x=2$ 处不连续，该点属于可去间断点，在区间 $[-3,3]$ 不连续。故本题选 C。

8. D 【解析】在现存在中国古代数学著作中，最早的一部是《周髀算经》，故本题选 D。

二、简答题

9. 见解析 【解析】假设有数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$，代入题设条件，得 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0}$，整理得 $(k_1+k_2+3k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1-2k_2+2k_3)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，要使上式成立，不论 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是否线性相关，只需 $\begin{cases}k_1+k_2+3k_3=0\\k_1-2k_2+2k_3=0\end{cases}$ 即可，可求得一个解为 $k_1=8$，$k_2=1$，$k_3=-3$，故 $8\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$，从而得证：向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

10. $-\frac{187}{8}$ 【解析】$\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $1,-1,2,-4$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=\prod\limits_{i=1}^{4}\lambda_i=8\neq0$，故 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆，又 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}=|\boldsymbol{A}|^3=8$，所以 $|\boldsymbol{A}|=2$，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_A=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_{A^*}}$，即为 $2,-2,1,-\frac{1}{2}$。设 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$，则 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值为：$f(2)=2^3+2\times2^2-2-3=11$，$f(-2)=(-2)^3+2\times(-2)^2+2-3=-1$，$f(1)=1+2-1-3=-1$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-3=-\frac{17}{8}$，故 $|\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=f(2)\cdot f(-2)\cdot f(1)\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{187}{8}$。

11. $\pi\cdot\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}\right)$ 【解析】先求 $f(x)$ 的表达式，注意到函数 e^x 在 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 的极限，可知 $f(x)=\begin{cases}0,x<0\\ \frac{-x}{x^2+1},x>0\end{cases}$，且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$。当 $x>0$ 时，$y=f(x)$ 与 $y=-\frac{x}{2}$ 的交点的横坐标为 $x=1$，且显然 $0<x<1$ 时，$-\frac{x}{2}>\frac{-x}{x^2+1}$，所以所求旋转体的体积 $\int_0^1\left[\pi\left(\frac{-x}{x^2+1}\right)^2-\pi\left(-\frac{x}{2}\right)^2\right]dx=\pi\left[\int_0^1\left(\frac{-x}{x^2+1}\right)^2dx-\int_0^1\left(-\frac{x}{2}\right)^2dx\right]=\pi\cdot\left[\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{12}\right]=\pi\cdot\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}\right)$，在 $\int_0^1\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$ 中，令 $x=\tan t$，得 $\int_0^1\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2t}{\sec^2t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2t-1}{\sec^2t}dt=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2t\,dt=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2t}{2}dt=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$。

12.【参考答案】

合情推理包括归纳推理和类比推理，是根据已有的事实，经过观察、猜想、比较、联想，再进行归纳、类比，然后提出猜想的推理。演绎推理是指从一般性的原理出发，推出某个特殊情况下的结论的推理过程。

合情推理与演绎推理在解决数学问题中的作用：合情推理在探索解题方法、解题思路，发现数学结论中具有重要的作用。演绎推理有助于证明数学结论，建立数学知识体系，培养学生严密的逻辑推理力。

合情推理和演绎推理是相辅相成、相互伴生的。每一个定理的得出，每个结论的发现，几乎都是合情推理和演绎推理交替运用，交相生辉的过程。

合情推理的结论需要演绎推理的验证，演绎推理的内容一般是通过合情推理获得的；

演绎推理可以验证合情推理的正确性，合情推理可以为演绎推理提供方向和思路。

13.【参考答案】

①属加种差定义：这种定义法是中学数学中最常用的定义方法，该法即按公式“邻近的属＋种差＝被定义概念”下定义，其中，种差是指被定义概念与同一属概念之下其他种概念之间的差别，即被定义概念具有而它的属概念的其他种概念不具有的属性。

例如，平行四边形给出如下的定义方式：“一组对边平行并且相等的四边形叫作平行四边形”。其中，平行四边形的概念邻近的属是四边形，平行四边形区别于四边形的其他种概念的属性即种差是“一组对边平行并且相等”。

②外延定义法：数学中有些概念，不易揭示其内涵，可直接指出概念的外延作为它的概念的定义。通常就是通过列举“被定义概念所有互不相容的种概念”的方式下定义。

例如，整数和分数统称为有理数；正弦、余弦、正切和余切函数叫作三角函数；椭圆、双曲线和抛物线叫作圆锥曲线。

③关系定义法：它是以被定义概念所反映的对象与另一对象之间关系或它与另一对象对第三者的关系作为种差的一种定义方式。

例如，大于直角而小于平角的叫作钝角。

三、解答题

14. (1)见解析 【解析】拉格朗日中值定理：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可

导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

证明：令 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$。则有：$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\varphi(a)=f(a)$，$\varphi(b)=f(a)$，故 $\varphi(a)=\varphi(b)$，所以 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件，从而知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，即 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

(2)【解析】作 $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，易知 $F(a)=F(b)=0$，由于 $f(x)$ 不是一次式也不为常函数，则 $F(x)$ 不为常数，所以至少有一点 $x_1\in(a,b)$ 使 $F(x_1)>0$，或至少有一点 $x_2\in(a,b)$ 使 $F(x_2)<0$，于是有：$\dfrac{F(x_1)-F(a)}{x_1-a}>0$，或 $\dfrac{F(x_2)-F(b)}{x_2-b}>0$。由拉格朗日中值定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)>0$，即有 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$，$f'(\xi)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，如果 $f(b)-f(a)\geqslant 0$，那么由上式便有 $|f'(\xi)|>\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$。

四、论述题

15.**【参考答案】**

“综合与实践”的实施是以问题为载体、以学生自主参与为主的学习活动。它有别于学习具体知识的探索活动，更有别于课堂上教师的直接讲授。它是教师通过问题引领、学生全程参与、实践过程相对完整的学习活动。

积累数学活动经验、培养学生应用意识和创新意识是数学课程的重要目标，应贯穿于整个数学课程之中。“综合与实践”是实现这些目标的重要和有效的载体。“综合与实践”的教学，重在实践、重在综合。重在实践是指在活动中，注重学生自主参与、全过程参与，重视学生积极动脑、动手、动口。重在综合是指在活动中，注重数学与生活实际、数学与其他学科、数学内部知识的联系和综合应用。

教师在教学设计和实施时应特别关注的几个环节是：问题的选择，问题的展开过程，学生参与的方式，学生的合作交流，活动过程和结果的展示与评价等。

要使学生能充分、自主地参与“综合与实践”活动，选择恰当的问题是关键。这些问题既可来自教材，也可以由教师、学生开发。提倡教师研制、开发、生成出更多适合本地学生特点的有利于实现“综合与实践”课程目标的好问题。

实施“综合与实践”时，教师要放手让学生参与，启发和引导学生进入角色，组织好学生之间的合作交流，并照顾到所有的学生。教师不仅要关注结果，更要关注过程，不要急于求成，要鼓励引导学生充分利用“综合与实践”的过程，积累活动经验、展现思考过程、交流收获体会、激发创造潜能。

在实施过程中，教师要注意观察、积累、分析、反思，使“综合与实践”的实施成为提高教师自身和学生素质的互动过程。

教师应该根据不同学段学生的年龄特征和认知水平，根据学段目标，合理设计并组织实施“综合与实践”活动。

五、案例分析题

16.**【参考答案】**

(1)这位老师的做法不符合新课标的理念。首先，这位老师在提问时，把学生新颖的回答中途打断，只满足单一的标准答案，一味强调机械套用解题的步骤和“通法”。殊不知，这两名学生的回

答的确富有创造性,可惜,这种偶尔闪现的创造性思维不仅没有被呵护,反而被教师的“标准的格式”轻易否定。其次,即使学生的回答是错误的,作为教师也要耐心倾听,并给予激励性的评价,这样既可以帮助学生纠正错误,又可以激励学生积极思考,激发学生的求异思维,从而培养学生的创新思维能力。

(2)关于课堂提问,我认为需要注意以下问题:

①提问要关注全体学生。提问的内容设计要由易到难,由浅入深,要富有层次,不同的问题要提问不同层次的学生;

②提问要有思考的价值,课堂提问要选择一个“最佳的智能高度”进行设问,使大多数学生“够得着”。

③提问的形式和方法要灵活多样。注意提问的角度转换,引导学生经历尝试、概括的过程,充分展示个性,让学生得到的是自己探究的成果,体验的是成功的快乐。

六、教学设计题

17.**【参考答案】**

(1)教学目标

①知识与技能目标:认识全等三角形,掌握全等三角形的概念及性质,能在全等三角形中准确找出对应顶点,对应边和对应角。

②过程与方法目标:在平移、旋转、翻折的过程中,学生的识图能力和动手操作能力得以培养。

③情感态度与价值观目标:通过各种真实、贴近生活的素材和问题情景,激发了学生学习数学的热情和兴趣,培养了勇于创新的精神,以及多方位审视问题的创造技巧。

教学重难点

教学重点:掌握全等三角形的概念及性质,能在全等三角形中准确找出对应顶点,对应边和对应角。

教学难点:能在全等三角形的变换中准确找到对应边、对应角。

(2)为了给学生创设良好的学习情境,激发学生的学习兴趣,我采用图片导入。

教师通过 PPT 展示几幅的图片,让学生进行观察,并提出问题:同学们,你们观察这些图片,它们有什么特点?你还能再举出这样的例子吗?由此引出新课——《全等三角形》。

设计意图:以问题引导学生探究,让学生积极主动地参与到课堂里面来,更好地调动学习氛围。

(3)新手环节:在这一环节,我设置了几个教学活动:

活动一:动手操作,探索新知

结合导入中提出的问题,请同学们再结合生活实际列举出生活中的一些形状、大小完全相同的图片。接下来我会组织学生,将三角尺按在纸板上,画出图形,观察它们的形状和大小是否完全相同,并将图形裁剪下来放在一起,看它们是否能完全重合。学生通过动手操作、观察后发现,形状和大小完全相同的图形放在一起能够完全重合,能够完全重合的两个图形叫做全等形。并且得出,能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形。

活动二:小组合作,掌握新知

接下来,我会组织学生,以小组为单位,将自己所裁剪出来的三角形,进行平移、翻折、旋转,并观察这些三角形,看随着位置变化,这些图形的形状和大小有无变化?学生通过小组合作得出,图形经过平移、翻折、旋转后,位置变化了,但是它的形状和大小均没有发生改变。教师补充,师生共同总结出,平移、翻折、旋转前后的图形全等。此时,我将顺势引导学生将所裁剪的三角形重合到一起,并提出问题:你们能找出它们的对应顶点、对应边和对应角吗?学生通过自己动手,从而加深对

全等三角形对应顶点、对应边和对应角的认识。

活动三：师生交流，拓展新知

接着我会再次抛出问题，能够完全重合的两个三角形，我们把它称为全等三角形，那么全等的符号是什么？全等三角形对应的边和对应角之间有什么关系？学生通过讨论交流，师生共同总结出全等三角形的性质即全等三角形的对应边相等，全等三角形的对应角相等。全等符号为“$\cong$”，从而体现出学生的主体地位。

2020 年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力(初级中学)考前冲刺密卷(三)

一、单项选择题

1．D 【解析】判断函数在某一点 x_0 连续性的方法：$f(x_0^+)=f(x_0^-)=f(x_0)$，$f(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+}(1+x)=2$，$f(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}2\sqrt{x}=2$，由已知 $f(1^+)=f(1^-)=f(1)=2$ 可知 $x=1$ 是 $f(x)$ 的连续点。故本题选 D。

2．A 【解析】数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=\frac{1}{3}$，且对任意正整数 m，n 都有 $a_{m+n}=a_m\cdot a_n$，$a_2=a_1\cdot a_1=\frac{1}{9}$，则 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=a_n\cdot a_1=\frac{1}{3}a_n$，则 $q=\frac{1}{3}$，$\therefore$数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=\frac{1}{3}$，公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列。$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$。故本题选 A。

3．A 【解析】因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\ln3)^n}{2^n}$ 为等比级数，其公比 q 满足 $|q|=\dfrac{\ln3}{2}<\dfrac{\ln e^2}{2}=1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\ln3)^n}{2^n}$ 收敛且和为 $\dfrac{1}{1-\frac{\ln3}{2}}=\dfrac{2}{2-\ln3}$。故本题选 A。

4．C 【解析】$y''-4y=0$ 的特征根 $\lambda_{1,2}=\pm2$，则其通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$。设其特解为 $y^*=Axe^{2x}$ 代入 $y''-4y=e^{2x}$，可解得 $A=\frac{1}{4}$。所以通解为 $y=C_1e^{-2x}+(C_2+\frac{1}{4}x)e^{2x}$，其中 C_1、C_2 为任意常数。故本题选 C。

5．A 【解析】平面 $2x-y+z=1$ 与平面 $2x-y+z+6=0$ 的法向量都为 $(2,-1,1)$，因此两平面平行，但是两平面并没有公共点，因此位置关系为平行但不重合。故本题选 A。

6．C 【解析】由于 $\lim\limits_{x\to3}f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x}{3-x}=\infty$，则 $x=3$ 是 $y=f(x)$ 的一条垂直渐近线；又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{3-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\frac{3}{x}-1}=-1$，所以 $y=-1$ 是 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线。故 $y=f(x)$ 既有水平渐近线又有垂直渐近线。故本题选 C。

7．B 【解析】二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}$，由 $r(\boldsymbol{A})=2$，知 $|\boldsymbol{A}|=0$，解得 $c=3$。故

本题选 B。

8. D 【解析】欧拉发现了著名的公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，故本题选 D。

二、简答题

9. 见解析 【解析】设有一组常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，两端左乘 $\boldsymbol{A}^{k-1}$，得 $\lambda_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，又∵ $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，∴ $\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{k+2}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=\boldsymbol{A}^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，∴ $\lambda_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，∵ $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，∴ $\lambda_1=0$，将 $\lambda_1=0$ 代入上式得：$\lambda_2\boldsymbol{A\alpha}+\lambda_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，将上式左乘 A^{k-2}，同上可证 $\lambda_2=0$，同理可证得：$\lambda_3=\lambda_4=\cdots=\lambda_k=0$，从而，得证向量组 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关。

10. $a=c=2,b=-3,\lambda_0=1$ 【解析】由题意可知：$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\xi}=\lambda_0\boldsymbol{\xi}$，两端左乘 $\boldsymbol{A}$，有 $\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{\xi}=\lambda_0\boldsymbol{A\xi}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\xi}=-\boldsymbol{\xi}$，即 $\lambda_0\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$，于是有：$\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1\\\lambda_0(-5-b+3)=1\\\lambda_0(c-1-a)=-1\end{cases}$，解得 $a=c,b=-3,\lambda_0=1$，又因为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&-1&a\\5&b&3\\1-a&0&-a\end{vmatrix}=a-3=-1$，得 $a=c=2$，所以 $a=c=2,b=-3,\lambda_0=1$。

11. $e+e^{-1}-2$；$\dfrac{\pi}{2}(e^2+e^{-2}-2)$ 【解析】曲线 $y=e^x$ 与 $y=e^{-x}$ 的交点为 $(0,1)$，曲线 $y=e^x$ 与 $y=e^{-x}$ 和直线 $x=1$ 的交点分别为 $(1,e)$ 和 $(1,e^{-1})$，取 x 微积分变量，其变化范围为 $[0,1]$，根据定积分的几何意义可知所求面积为 $S=\int_0^1(e^x-e^{-x})\,dx=(e^x+e^{-x})\Big|_0^1=e+e^{-1}-2$；所求旋转体体积为 $V=\pi\int_0^1(e^x)^2\,dx-\pi\int_0^1(e^{-x})^2\,dx=\pi\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}+\dfrac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{2}(e^2+e^{-2}-2)$。

12. **【参考答案】**

教学方案是教师对教学过程的“预设”，教学方案的形成依赖于教师对教材的理解、钻研和再创造。理解和钻研教材，应以本标准为依据，把握好教材的编写意图和教学内容的教育价值；对教材的再创造，集中表现在：能根据所教班级学生的实际情况，选择贴切的教学素材和教学流程，准确地体现基本理念和内容标准规定的要求。

实施教学方案，是把“预设”转化为实际的教学活动。在这个过程中，师生双方的互动往往会“生成”一些新的教学资源，这就需要教师能够及时把握，因势利导，适时调整预案，使教学活动收到更好的效果。

13. **【参考答案】**

义务教育阶段数学课程的设计，充分考虑本阶段学生数学学习的特点，符合学生的认知规律和心理特征，有利于激发学生的学习兴趣，引发学生的数学思考；充分考虑数学本身的特点，体现数学的实质；在呈现作为知识与技能的数学结果的同时，重视学生已有的经验，使学生体验从实际背景中抽象出数学问题、构建数学模型、寻求结果、解决问题的过程。

按以上思路具体设计如下：

(一)学段划分

根据学生发展的生理和心理特征，将九年的学习时间划分为三个学段：第一学段(1—3 年级)、

第二学段(4—6 年级)、第三学段(7—9 年级)。

(二)课程目标

义务教育阶段数学课程目标分为总目标和学段目标,从知识技能、数学思考、问题解决、情感态度四个方面加以阐述。

(三)课程内容

在各学段中,安排了四个部分的课程内容:“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”。

三、解答题

14. (1) $a=-3$ **【解析】**由 $f(x)=x^3+ax$ 得 $f'(x)=3x^2+a$,根据题意得 $f'(1)=0$,解得 $a=-3$。此时 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$,令 $f'(x)=0$,解得 $x=-1$ 或 $x=1$。当 $-1<x<1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在 $(-1,\ 1)$ 上单调递减;当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,符合当 $x=1$ 时,$f(x)$ 有极小值,因此 $a=-3$。

(2) $a>1$ 或 $a<0$ **【解析】**设过点 $P(1,\ 1)$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相切于点 (x_0, y_0),则 $y_0=x_0^3+ax_0$,且切线斜率为 $f'(x_0)=3x_0^2+a$,所以切线方程为 $y-y_0=(3x_0^2+a)(x-x_0)$,因此 $1-(x_0^3+ax_0)=(3x_0^2+a)(1-x_0)$,整理可得 $2x_0^3-3x_0^2+1-a=0$,设 $g(x)=2x^3-3x^2+1-a$,则“过点 $P(1,\ 1)$ 只有一条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切”等价于“$g(x)$ 只有一个零点”。$g'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$,当 x 变化时,$g(x)$ 与 $g'(x)$ 的变化情况如下:

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ 1)$	1	$(1,\ +\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\uparrow$	$1-a$	$\downarrow$	$-a$	$\uparrow$

所以,$g(0)=1-a$ 是 $g(x)$ 的极大值,$g(1)=-a$ 是 $g(x)$ 的极小值。当 $g(x)$ 只有一个零点时,有 $g(0)=1-a<0$ 或 $g(1)=-a>0$,解得 $a>1$ 或 $a<0$。因此当过点 $P(1,\ 1)$ 只有一条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切时,a 的取值范围是 $a>1$ 或 $a<0$。

四、论述题

15.**【参考答案】**

评价结果的呈现应采用定性与定量相结合的方式。第一学段的评价应当以描述性评价为主,第二学段采用描述性评价和等级评价相结合的方式,第三学段可以采用描述性评价和等级(或百分制)评价相结合的方式。

评价结果的呈现和利用应有利于增强学生学习数学的自信心,提高学生学习数学的兴趣,使学生养成良好的学习习惯,促进学生的发展。评价结果的呈现,应该更多地关注学生的进步,关注学生已经掌握了什么,获得了哪些提高,具备了什么能力,还有什么潜能,在哪些方面还存在不足,等等。

例如,下面是对某同学第二学段关于“统计与概率”学习的书面评语:王小明同学,本学期我们学习了收集、整理和表达数据。你通过自己的努力,能收集、记录数据,知道如何求平均数,了解统计图的特点,制作的统计图很出色,在这方面表现突出。但你在使用语言解释统计结果方面还存在一定差距。继续努力,小明! 评定等级:B。

这个以定性为主的评语,实际上也是教师与学生的一次情感交流。学生阅读这一评语,能够获得成功的体验,树立学好数学的自信心,也知道自己的不足和努力方向。教师要注意分析全班学生评价结果随时间的变化,从而了解自己教学的成绩和问题,分析、反思教学过程中影响学生能

力发展和素质提高的原因，寻求改善教学的对策。同时，以适当的方式，将学生一些积极的变化及时反馈给学生。

五、案例分析题

16.**【参考答案】**

(1)此教学片段落实了数感、运算能力、推理能力这三个数学核心概念。在新课标中，有十个数学核心概念：数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力和模型思想、应用意识和创新意识。数感主要是指关于数与数量、数量关系、运算结果估计等方面的感悟。建立数感有助于学生理解现实生活中数的意义，理解或表述具体情境中的数量关系。教学中先提出计算某市的温度差，然后探究如何计算 $3-(-3)$，探求新知，在这个过程中帮助学生树立数感。运算能力主要是指能够根据法则和运算律正确地进行运算的能力，在教学片断中的推理运算过程培养了学生的运算能力。推理能力的发展应贯穿于整个数学学习过程中。推理一般包括合情推理和演绎推理，合情推理是从已有的事实出发，凭借经验和直觉，通过归纳和类比等推断某些结果。在教学片断中，探究减法变成加法，减去一个负数，减去一个正数，推理出有理数的减法法则，培养了学生的合情推理能力。

(2)从教学片断可以看出，教师能很好地了解学生的学习起点，对学生的学习起点把握准确。教学方法合理，体现了“学生为主体，教师是组织者、引导者、合作者”的新课标理念。课程内容反映了社会的需要、数学的特点，符合学生的认知规律。课程内容的选择贴近学生的实际，有利于学生体验与理解、思考与探索。导入：某市某天的气温是 $-3^{\circ}C \sim 3^{\circ}C$，这天的温差是多少？列出算式 $3-(-3)$，并对这个算式进行探究算法。课程内容的组织重视过程，处理好过程与结果的关系；重视直接经验，处理好直接经验与间接经验的关系。学生之前学习了加法和减法的意义，有理数的意义，在此基础上，引导学生探究有理数的减法法则，具体从减法变成加法，减去一个负数，减去一个正数，减去 0，归纳得出有理数的减法法则，整个过程由浅入深，层层深入，有利于帮助学生理解有理数减法法则。

教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。有效的教学活动是学生学与教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的组织者、引导者与合作者。教师教学应该以学生的认知发展水平和已有的经验为基础，面向全体学生，注重启发式和因材施教。在教学片断中，教师提出问题，引导学生一步一步地探究新知，体现了学生是学习的主体，也体现了教师的主导作用。

(3)教学过程的反思如下：①了解学生，研究教材。这个教学内容需要学生具备正数、负数、零以及相反数的知识，学生对这些知识的掌握程度会直接影响学习有理数减法法则，在这些知识中，相反数是学生理解起来比较困难，因此，教学过程中注意相反数在减法中的应用。本教学片断主要是掌握有理数减法法则，难点是对有理数减法的理解，在教学过程中，教师引导学生一步一步探究有理数的减法法则，最后归纳得出有理数的减法法则，突出重点，突破难点。②教学是师生交往、积极互动、共同发展的过程。教学的实质是交往，师生相互合作、相互理解、相互补充，师生之间相互平等、相互尊重。教学是师生双方互动的过程。在教学过程中，教师提出问题，引导学生探究问题，体现了教师互动，但是在教学过程中对学生学习活动没有明确的体现。新课标提出独立思考、主动探索、合作交流的学习方式，应该在教学中体现。③教学过程重于教学结果。教学过程中要重视客观真理，但更重视获得真理的过程。注重引导学生参与探索、归纳有理数减法法则的过程，主动获取知识。这样，学生在这节课上个不仅学懂了法则，而且能感知到研究数学问题的一些基本方法。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1)教学目标:

知识与技能:学生掌握平行四边形的有关概念;探索平行四边形的性质,会运用平行四边形的性质解决有关问题;通过学生猜测结论,培养学生的猜想能力和观察能力。

过程与方法:培养学生提出问题的能力,并能在提出问题的基础上确定研究问题的基本方向及研究方法,渗透从特殊到一般的拓展研究策略,同时发展学生合情推理能力。

情感、态度与价值观:培养学生善于发现,勇于探索的精神;让学生在探求知识的活动过程中体会成功的喜悦,从而增强其学好数学的信心。

(2)①做一做(让学生实际动手操作)(出示幻灯片)

用一张半透明的纸复制你刚才画的平行四边形,并将复制后的四边形绕一个顶点旋转180°,你能平移该纸片,使它与你画的平行四边形$ABCD$重合吗?

(教师用几何画板平台展示整个旋转变化过程)

②教师活动:提出问题根据定义画一个平行四边形,观察这个四边形,除了"两组对边分别平行"以外,它的边角之间还有其他的关系吗?度量一下,是否和你的猜想一致?然后深入到小组中参与活动与指导。

学生活动:动手画图,猜想,度量,验证,得出:平行四边形的对边相等;平行四边形的对角相等。

(3)教师提问:你能证明你发现的结论吗?

学生小组内交流,并与前面所学知识联系,证明线段和角相等的办法是三角形全等,而四边形问题转化成三角形问题是通过连接对角线。学生独立完成证明,一名同学板演。

教师根据学生的汇报,边板书边讲解证明过程及结论:平行四边形的对边相等,对角也相等。

学生经历猜想—实践—验证的过程,从中体会亲自动手实践学到知识的乐趣,获得成功的体验,再寻找证明线段和角相等的办法——三角形全等,一方面体会知识的前后连贯性,另一方面意在培养学生良好的学习习惯,培养学生的推理能力以及严谨的学习态度。