准考证号____________

姓名____________

2020年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力(高级中学)
考前冲刺密卷(一)

(科目代码:404)

重要提示

为维护您的个人权益,确保教师资格证考试的公平公正,请您协助我们监督考试实施工作。

本场考试规定:监考老师要向本考场全体考生展示题本密封情况,并邀请2名考生代表验封签字后,方能开启试卷袋。

条形码粘贴处

请将此条形码揭下,

贴在答题卡指定位置

注意事项

一、本试卷分满分 150 分，总时限 120 分钟，各部分不单独计时，答题时请注意合理分配时间。

二、请按照要求在答题卡上填写好自己的姓名，涂写好准考证号，严禁折叠答题卡。

三、必须在答题卡上答题；在题本上答题，一律无效。

四、监考人员宣布考试开始时，方可答题；宣布考试结束时，应立即停止答题。题本、答题卡、草稿纸一律留在桌上，待监考人员确认数量无误，允许离开后，方可离开考场。如果违反了以上任何一项要求，都将影响你的成绩。

五、在本套试卷中，可能有些试题较难，因此你不要在一道题上思考时间太久，遇到不会答的题目可先跳过去，如果有时间再去思考，否则，你可能没有时间完成后面的题目。

六、试题答错不倒扣分。

停！请不要往下翻！听候监考老师的指示。
否则，会影响你的成绩。

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案字母按要求涂黑。错选、多选和未选均无分。

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+x^2}\right)^{x^2}$ 的值是（　　）。

A. 0　　B. 1

C. e　　D. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)$ 为（　　）。

A. 0　　B. 1

C. -1　　D. 不存在

3. 函数 $f(x)=\int_0^x \dfrac{t^3}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为（　　）。

A. 0　　B. $\dfrac{1}{4}$

C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

4. 设二元函数 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（　　）。

A. $\dfrac{-y}{x^2+y^2}$　　B. $\dfrac{y}{x^2+y^2}$

C. $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$　　D. $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$

5. 曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线有（　　）。

A. 1 条　　B. 2 条

C. 至少 3 条　　D. 不存在

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 的逆矩阵为（　　）。

A. $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$　　B. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$

C. $\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$　　D. $\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$

7. （　　）属于数学演绎推理方式。

A. 归纳推理　　B. 数学归纳法

C. 类比推理　　D. 合情推理

8. 世界上第一个把 π 计算到 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ 的数学家是(　　)。

A. 刘徽　　B. 祖冲之

C. 阿基米德　　D. 卡瓦列里

二、简答题(本大题共 5 小题,每小题 7 分,共 35 分)

9. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\3&4&1\end{bmatrix}$,求子空间 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}^3)=\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^3\}$ 的一组正交基。

10. 直线 $y=x$ 将椭圆 $x^2+3y^2=6y$ 分为两块,设小块面积为 A,大块面积为 B,求 $\dfrac{A}{B}$ 的值。

11. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{B}$ 。

12. 浅谈创新意识。

13. 简述命题教学的基本流程。

三、解答题（本大题共1小题，每题10分，共10分）

14. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=kx_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2mx_1x_3(m>0)$，其中二次型的矩阵的特征值之和为1，特征值之积为 -12。

(1)求 k,m；

(2)用正交变换化二次型为标准型，并求所作的正交变换以及对应的正交矩阵。

四、论述题（本大题共1题，每题15分，共15分）

15. "精讲多练与自主建构相结合"是数学教学的基本原则。

(1)简述精讲多练与自主建构相结合教学原则的内涵；

(2)如何有效的应用精讲多练与自主建构相结合的原则进行教学？

五、案例分析题(本大题共 1 题,每题 20 分,共 20 分)

16. 案例:某老师在课堂上给学生讲解了这样一道试题:求过点 (0,1) 的直线,使它与抛物线 $y^2=2x$ 仅有一个交点。

老师板书过程如下:

设所求的过点 (0,1) 的直线为 $y=kx+1$,则它与抛物线交点满足 $\begin{cases} y=kx+1 \\ y^2=2x \end{cases}$,消去 y 得 $(kx+1)^2-2x=0$,整理得 $k^2x^2+(2k-2)x+1=0$。因为直线与抛物线仅有一个交点,所以 $\Delta=0$,解得 $k=\dfrac{1}{2}$,所以所求直线为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$。

请指出上述解答错误之处,并写出正确解法。

六、教学设计题(本大题共 1 题,每题 30 分,共 30 分)

17. 以下是普通高中课程标准实验教科书《数学》必修 2,“点到直线的距离”的教学内容,请阅读并据此回答后面的问题。

(1)请写出本节课的教学目标和教学重难点;

(2)在本节课教学中应渗透怎样的数学思想;

(3)请对点到直线距离公式的探究与推导过程进行教学设计,并写出教学设计中渗透的现代教育理念。

3.3.3 点到直线的距离

思考 如图 3.3-4，已知点 $P_0(x_0, y_0)$，直线 l：$Ax+By+C=0$，如何求点 P_0 到直线 l 的距离？

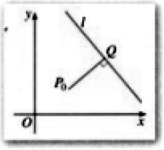


图 3.3-4

点 P_0 到直线 l 的距离，是指从点 P_0 到直线 l 的垂线段 P_0Q 的长度，其中 Q 是垂足（图 3.3-4）.

由 $P_0Q\perp l$，以及直线 l 的斜率为 $-\dfrac{A}{B}$，可得 l 的垂线 P_0Q 的斜率为 $\dfrac{B}{A}$，垂线 P_0Q 的方程可以求出．直线 P_0Q 与直线 l 的交点，即垂足 Q 点的坐标也可以求出．于是 P_0 与 Q 间的距离 $|P_0Q|$ 可以求出，P_0Q 的长即为点 P_0 到直线 l 的距离.

试一试，你能求出 $|P_0Q|$ 吗？

上述方法虽然思路十分自然，但具体运算较繁，下面我们采用另一种方法.

如图 3.3-5，设 $A\neq0$，$B\neq0$，则直线 l 与 x 轴和 y 轴都相交，过点 P_0 分别作 x 轴和 y 轴的平行线，交直线 l 于 R 和 S，则直线 P_0R 的方程为 $y=y_0$，R 的坐标为 $\left(-\dfrac{By_0+C}{A}, y_0\right)$；直线 P_0S 的方程为 $x=x_0$，S 的坐标为 $\left(x_0, -\dfrac{Ax_0+C}{B}\right)$.

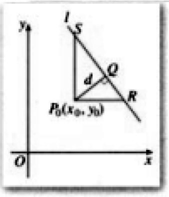


图 3.3-5

于是有

$$|P_0R|=\left|-\frac{By_0+C}{A}-x_0\right|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{|A|},$$

$$|P_0S|=\left|-\frac{Ax_0+C}{B}-y_0\right|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{|B|},$$

$$|RS|=\sqrt{|P_0R|^2+|P_0S|^2}=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{|A|\,|B|}|Ax_0+By_0+C|.$$

设 $|P_0Q|=d$，由三角形面积公式可得

$$d\cdot|RS|=|P_0R|\cdot|P_0S|,$$

于是得

$$d=\frac{|P_0R|\cdot|P_0S|}{|RS|}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

因此，点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.}$$

当 $A=0$ 或 $B=0$ 时，上述公式是否成立？

准考证号________

姓名________

2020 年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力(高级中学)
考前冲刺密卷(二)

(科目代码:404)

重要提示

为维护您的个人权益,确保教师资格证考试的公平公正,请您协助我们监督考试实施工作。

本场考试规定:监考老师要向本考场全体考生展示题本密封情况,并邀请 2 名考生代表验封签字后,方能开启试卷袋。

条形码粘贴处

请将此条形码揭下,

贴在答题卡指定位置

注意事项

一、本试卷分满分 150 分，总时限 120 分钟，各部分不单独计时，答题时请注意合理分配时间。

二、请按照要求在答题卡上填写好自己的姓名，涂写好准考证号，严禁折叠答题卡。

三、必须在答题卡上答题；在题本上答题，一律无效。

四、监考人员宣布考试开始时，方可答题；宣布考试结束时，应立即停止答题。题本、答题卡、草稿纸一律留在桌上，待监考人员确认数量无误，允许离开后，方可离开考场。如果违反了以上任何一项要求，都将影响你的成绩。

五、在本套试卷中，可能有些试题较难，因此你不要在一道题上思考时间太久，遇到不会答的题目可先跳过去，如果有时间再去思考，否则，你可能没有时间完成后面的题目。

六、试题答错不倒扣分。

停！请不要往下翻！听候监考老师的指示。
否则，会影响你的成绩。

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案字母按要求涂黑。错选、多选和未选均无分。

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$（　　）。

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 曲线 $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+6x+1$ 在点 (0,1) 处的切线与 x 轴交点坐标是（　　）。

A. $(-1,0)$　　B. $\left(-\dfrac{1}{6},0\right)$

C. $(1,0)$　　D. $\left(\dfrac{1}{6},0\right)$

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=0$ 则常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$（　　）。

A. 发散　　B. 条件收敛

C. 绝对收敛　　D. 不一定收敛

4. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为（　　）。

A. $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}\dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ -2 & 1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2}\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

5. 向量组 $\boldsymbol{a}_1=(1,1,3,1)$，$\boldsymbol{a}_2=(-1,1,-1,3)$，$\boldsymbol{a}_3=(5,-2,8,9)$，$\boldsymbol{a}_4=(-1,3,1,7)$ 的秩（　　）。

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

6. $x\sim N(3,1)$，且 $P(2\leqslant x\leqslant 4)=0.6826$，则 $P(x>4)=$（　　）。

A. 0.1585　　B. 0.1586

C. 0.1587　　D. 0.1588

7. 数学教学活动必须建立在学生的认知发展水平和（　　）的基础上。

A. 已有的知识经验　　B. 师生的综合指导

C. 师生的情感交流　　D. 学生的情感体验

8. 美索不达米亚是最早采用位值制记数的民族，他们主要用的是（　　）。

A. 六十进制　　B. 十进制

C. 五进制　　D. 二十进制

二、简答题(本大题共5小题,每小题7分,共35分)

9. 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $e^z-z+xy^3=0$ 确定的隐函数,求 $\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$,$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$,且 $|\boldsymbol{A}|=-1$,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 λ_0,对应于 λ_0 的特征向量为 $\xi=[-1\quad -1\quad 1]^T$,求 a,b,c 及 λ_0。

11. 试验证直线 l：$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$ 与平面Π：$2x+y-z-3=0$ 相交，并求出它的交点和交角。

12. 抽象是数学的本质特征，数学的抽象性表现在哪些方面，请举例说明。

13. 如何做到"不同的人在数学上得到不同的发展"？

三、解答题(本大题共 1 小题,每题 10 分,共 10 分)

14. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $f(x)>0$。证明函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调递增函数。

四、论述题(本大题共 1 题,每题 15 分,共 15 分)

15. 结合实例简要分析数学概念的基本要求。

五、案例分析题（本大题共 1 题，每题 20 分，共 20 分）

16. 案例：下列是某位学生的作业，请阅读并回答问题。

在 $\triangle ABC$ 中，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$\angle C=30^\circ$，试着判断 $\triangle ABC$ 的形状。

解：根据余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即 $(\sqrt{3})^2+1^2-2\sqrt{3}\cos 30^\circ=1$，所以 $c=1$，又由正弦定理，得 $\sin A=\dfrac{a\sin C}{c}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \angle A=60^\circ$ $\therefore \angle C=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ$。故 $\triangle ABC$ 是直角三角形。

问题：

(1)指出解题过程中的错误之处，并分析产生错误的原因；

(2)给出正确解法，并简述应采取哪些教学措施以避免此类错误的发生。

六、教学设计题（本大题共 1 题，每题 30 分，共 30 分）

17. 下列材料呈现的是《普通高中课程标准实验教科书（人教 A 版）数学必修 3》“古典概型”的部分教学内容请阅读并回答问题。

材料：

(1) 试验中所有可能出现的基本事件只有有限个；

(2) 每个基本事件出现的可能性相等.

我们将具有这两个特点的概率模型称为**古典概率模型**(classical models of probability)，简称古典概型.

假设有 20 道单选题，如果有一个考生答对了 17 道题，他是随机选择的可能性大，还是他掌握了一定的知识的可能性大？

例 2　单选题是标准化考试中常用的题型，一般是从 A、B、C、D 四个选项中选择一个正确答案. 如果考生掌握了考查的内容，他可以选择惟一正确的答案. 假设考生不会做，他随机地选择一个答案，问他答对的概率是多少？

解：这是一个古典概型，因为试验的可能结果只有 4 个：选择 A、选择 B、选择 C、选择 D，即基本事件共有 4 个，考生随机地选择一个答案是指选择 A、B、C、D 的可能性是相等的. 由古典概型的概率计算公式得：

$$P(\text{“答对”})=\frac{\text{“答对”所包含的基本事件的个数}}{4}=\frac{1}{4}=0.25.$$

在标准化的考试中既有单选题又有多选题，多选题是从 A、B、C、D 四个选项中选出所有正确的答案，同学们可能有一种感觉，如果不知道正确答案，多选题更难猜对，这是为什么？

问题：

(1)以例 2 和例 2 左侧的问题为教学内容，写出教学目标、重点和难点；

(2)以例 2 和例 2 左侧的问题为教学内容，设计一份教学过程简案；

(3)针对上述“探究”栏目中的问题，给出解释。

准考证号____________

姓名____________

2020年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力(高级中学)
考前冲刺密卷(三)

(科目代码:404)

重要提示

为维护您的个人权益,确保教师资格证考试的公平公正,请您协助我们监督考试实施工作。

本场考试规定:监考老师要向本考场全体考生展示题本密封情况,并邀请2名考生代表验封签字后,方能开启试卷袋。

条形码粘贴处

请将此条形码揭下,

贴在答题卡指定位置

注意事项

一、本试卷分满分 150 分，总时限 120 分钟，各部分不单独计时，答题时请注意合理分配时间。

二、请按照要求在答题卡上填写好自己的姓名，涂写好准考证号，严禁折叠答题卡。

三、必须在答题卡上答题；在题本上答题，一律无效。

四、监考人员宣布考试开始时，方可答题；宣布考试结束时，应立即停止答题。题本、答题卡、草稿纸一律留在桌上，待监考人员确认数量无误，允许离开后，方可离开考场。如果违反了以上任何一项要求，都将影响你的成绩。

五、在本套试卷中，可能有些试题较难，因此你不要在一道题上思考时间太久，遇到不会答的题目可先跳过去，如果有时间再去思考，否则，你可能没有时间完成后面的题目。

六、试题答错不倒扣分。

停！请不要往下翻！听候监考老师的指示。
否则，会影响你的成绩。

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案字母按要求涂黑。错选、多选和未选均无分。

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}=$（　　）。

A. 0　　B. 1

C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $-\dfrac{1}{3}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x,x>1\end{cases}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的（　　）。

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　D. 连续点

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 为（　　）。

A. $\dfrac{2}{2-\ln 3}$　　B. $\dfrac{2}{\ln 3}$

C. 1　　D. $\ln 3$

4. 微分方程 $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为（其中 C_1、C_2 为任意常数）（　　）。

A. $y=C_1e^{2x}+\left(C_2+\dfrac{1}{4}x\right)e^{-2x}$　　B. $y=C_1e^{-2x}+\left(C_2-\dfrac{1}{4}x\right)e^{2x}$

C. $y=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\dfrac{1}{4}x\right)e^{2x}$　　D. $y=C_1e^{2x}+\left(C_2-\dfrac{1}{4}x\right)e^{-2x}$

5. 齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\ -x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$ 的基础解系所含解向量的个数为（　　）。

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

6. 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，参数 $c=$（　　）。

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

7. 下列描述不是合情推理的是（　　）。

A. 从一般到特殊的推理　　B. 从特殊到一般的推理

C. 通过实验验证结论的推理　　D. 通过观察猜想得到结论的推理

8. 发现著名公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 的是（　　）。

A. 笛卡尔　　B. 牛顿

C. 莱布尼茨　　D. 欧拉

二、简答题(本大题共 5 小题,每小题 7 分,共 35 分)

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,若存在正整数 k ,使线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$,且 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关。

10. 求由曲线 $y=\mathrm{e}^x$,$y=\mathrm{e}^{-x}$ 与直线 $x=1$ 所围成的平面图形的面积及这个平面图形绕 x 轴旋转所成旋转体体积。

11. 从一批 10 个合格品与 3 个次品的产品中一件一件地抽取产品,各种产品被抽到的可能性相同,求在放回抽取的情况下,直到抽出合格品为止,所求抽取次数的分布律。

12. 简述数学课程结构设计依据？

13. 简述学科核心素养及数学学科核心素养的内容？

三、解答题（本大题共 1 小题，每题 10 分，共 10 分）

14. 设 $a>b>0$，证明：$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$。

四、论述题(本大题共1题,每题15分,共15分)

15. 教学评价是数学教学活动的重要组成部分。评价应以课程目标、课程内容和学业质量标准为基本依据。日常教学活动评价,要以教学目标的达成为依据。请结合高中教学论述日常评价的原则。

五、案例分析题(本大题共1题,每题20分,共20分)

16. 案例:某教科书选修4-5(不等式的证明)有一道例题,求证:$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$

证明:因为$\sqrt{2}+\sqrt{7}$和$\sqrt{3}+\sqrt{6}$都是正数,所以要证$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$,只需证$(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$,展开得$9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18}$,只需证$\sqrt{14}<\sqrt{18}$,只需证$14<18$。因为$14<18$成立,所以$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$成立。

两位教师基于上述例题,在课堂教学中做了教学处理:

教师1:让学生直接阅读教科书,然后问学生是否看懂了,在得到一些学生看懂了的反馈后,教师又布置了一道练习题。求证:$\sqrt{3}+\sqrt{8}>1+\sqrt{10}$。

教师2:让学生用计算器分别计算$\sqrt{2}+\sqrt{7}$和$\sqrt{3}+\sqrt{6}$,并比较大小,然后问学生如果不用计算

器计算，那么如何比较大小？让学生独立思考，教师巡视后提问没有思路的同学，并进一步启发学生，为了证明该不等式，只需证明什么不等式即可。为了广开学生思路，教师把学生提出的几种方法都写在黑板上，如 $(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$，$\sqrt{7}-\sqrt{6}<\sqrt{3}-\sqrt{2}$，……，通过师生互动合作，用几种分析法解决了问题后，教师接着问学生，是否还有其它不同的解决问题的思路。一位同学说到，我想到了该不等式问题可以转化为函数问题予以解决。教师觉得这位同学的方法独具匠心，但是教师设计教学时，没有想到这种解法，觉得这是教学中生成的新解法。

问题：

(1)教师 1 主要按照教科书提供的解决问题的方法组织课堂教学，教师 2 没有完全按照教科书组织教学，请对两位教师的做法加以评价；

(2)为了引发学生积极思考、领悟数学思想，从处理好课堂教学中预设与生成关系的视角，对两位教师的教学作评析；

(3)给出运用函数证明该不等式的方法，并简要说明该方法的数学教学价值。

六、教学设计题（本大题共 1 题，每题 30 分，共 30 分）

17. 下列是“简单的三角恒等变换”中的例 2，看图回答问题。

例 2 求证：

(1) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$；

(2) $\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$.

这两个式子的左右两边在结构形式上有什么不同？

证明：(1) 因为

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

将以上两式的左右两边分别相加，得

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta.$$

即

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

如果记
$\sin\alpha\cos\beta=x$，
$\cos\alpha\sin\beta=y$，
则有
$x+y=\sin(\alpha+\beta)$，
$x-y=\sin(\alpha-\beta)$.
只要解上述方程组，就可以求出 x，即求出 $\sin\alpha\cos\beta$.

(1)本内容的教学目标和教学重难点；

(2)本内容所蕴涵的数学思想；

(3)本内容的教学过程的简案；

(4)对例 2(2)给出另一种证明。

2020 年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力(高级中学)考前冲刺密卷

参考答案及解析

目　录

2020 年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力(高级中学)考前冲刺密卷(一)

一、单项选择题

1. C 【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+x^2}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{1+x^2}\right)^{x^2+1}}{\left(1+\dfrac{1}{1+x^2}\right)}=\mathrm{e}$。故本题选 C。

2. D 【解析】$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\Delta x}}{(\Delta x)^2}$,利用等价无穷小代换,得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{\Delta x}=\infty$,即不存在,故本题选 D。

3. A 【解析】$f'(x)=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}\geqslant 0$,函数在 $[0,1]$ 单调递增,因此当 $x=0$ 时有最小值为 0,故本题选 A。

4. A 【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$。故本题选 A。

5. B 【解析】由题意可知,求满足要求解 t 的个数。曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 的切向量为 $\boldsymbol{s}=(1,2t,3t^2)$,平面 $x+2y+z=4$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$,由于是求线面平行,因此,$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0\Rightarrow 3t^2+4t+1=0\Rightarrow t=-\dfrac{1}{3},-1$,验证切点不在平面上,因此,判断 2 条。故本题选 B。

6. C 【解析】考查逆矩阵的定义。对 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 等价变形 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=3\boldsymbol{E}$,变换成含有 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 的因子,$\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$。故本题选 C。

7. B 【解析】数学归纳法是一种证明命题的方法,是一种演绎推理方法,它的基本思想是递推思想,故本题选 B。

8. B 【解析】根据数学史可知,世界上第一个把 π 计算到 $3.1415926<\pi<3.1415927$ 的数学家是祖冲之。故本题选 B。

二、简答题

9. 见解析 【解析】取 $\mathbf{R}^3$ 上一组基 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,所 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=(1,1,3)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\varepsilon}_1$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=(1,2,4)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\varepsilon}_2$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\varepsilon}_2$,则 $\boldsymbol{A}(\mathbf{R}^3)=\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^3\}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)$,$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\3&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,所以 $\mathbf{R}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=2$;又因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{A}(\mathbf{R}^3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_3)$,将 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 进行施密特正交化,可得 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,1,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\dfrac{4}{11},\dfrac{7}{11},-\dfrac{1}{11}\right)^{\mathrm{T}}$,所以子空间 $\boldsymbol{A}(\mathbf{R}^3)=\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^3\}$ 的一组正交基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,1,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\dfrac{4}{11},\dfrac{7}{11},-\dfrac{1}{11}\right)^{\mathrm{T}}$。

10. $\dfrac{A}{B}=\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$ 【解析】由题意可得:直线与椭圆的交点为 $(0,0)$,$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$,则根据积分的定义可得:$A=\int_0^{\frac{3}{2}}(\sqrt{6y-3y^2}-y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{3}{2}}(\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-(y-1)^2}-y)\mathrm{d}y=I_1-I_2$,令 $y-1=$

$\sin t$，则 $I_1=\int_0^{\frac{3}{2}}(\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-(y-1)^2})\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\sqrt{3}\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{8}$，而 $I_2=\int_0^{\frac{3}{2}}y\,\mathrm{d}y=\frac{9}{8}$，所以 $A=\frac{4\sqrt{3}\pi-9}{12}$，由于椭圆面积为 $\sqrt{3}\pi$，故 $B=\sqrt{3}\pi-\frac{4\sqrt{3}\pi-9}{12}=\frac{8\sqrt{3}\pi+9}{12}$，从而有 $\frac{A}{B}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$。

11. $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$ **【解析】**由题意可知，$\boldsymbol{A}$ 可逆，则用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 右乘方程两边，可得：$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，化简整理有：$(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=6(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}$。$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}$，$(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{B}=6(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$。

12.**【参考答案】**

为了适应时代发展对人才培养的需要，在数学课程中，除了应当注重发展学生的数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力和模型思想，还要特别注重发展学生的应用意识和创新意识。

创新意识的培养是现代数学教育的基本任务，应体现在数学教与学的过程之中，学生自己发现问题和提出问题是创新的基础；独立思考和学会思考是创新的核心；归纳概括得到猜想和规律，并加以验证是创新的重要方法。创新意识的培养应该从义务教育阶段做起，贯穿数学教育的始终。

13.**【参考答案】**

(1)命题的引入：用观察、实验，归纳等方法引入命题。

(2)命题的证明：命题引入后，教师的重点工作转向对命题条件、结论的剖析、探讨其证明思路。在教学中要做好以下几方面的工作。①注意对定理证明的思路分析。②注意命题的多种证法。③注意建立数学命题系统化体系。④注意揭示数学的思想方法。

(3)命题的明确：经过前两个环节的教学，猜想已经得到证明，获得了一个真命题，对其进行分析就是明确命题需要做的工作。明确命题就是要明确命题的条件、结论、表示、适用范围等。

(4)命题的巩固：命题的巩固可以采用当堂巩固和及时复习两种方式。

(5)命题的应用：注意安排好各类习题，既有基本训练题，又有巩固知识的题型，还要有综合型的题目。另外还应适当地补充一些逆用、变用定理及公式的例题、习题，以培养学生活用、逆用命题的能力。

三、解答题

14. (1) $k=1$，$m=2$；(2)正交变换见解析，对应的正交矩阵为 $\begin{bmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$

【解析】(1)二次型 f 的对应矩阵为 $A=\begin{bmatrix}k&0&m\\0&2&0\\m&0&-2\end{bmatrix}$，设 A 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，由题意可知：$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=k+2-2=1\\\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=|A|=-4k-2m^2=-12\end{cases}$，解得 $k=1,m=\pm2$，已知 $m>0$，所以 $k=1$，$m=2$。

(2)由矩阵 A 的特征方程 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-2&0\\-2&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)=0$，可知 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$，所以二次型的标准型为 $2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$。

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$，由 $(2E-A)x=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\mathbf{0}$，解得基础解系为 $\xi_1=[0\quad1\quad0]^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=[2\quad0\quad1]^{\mathrm{T}}$。

当 $\lambda_3=-3$，由 $(-3E-A)x=\begin{bmatrix}-4&0&-2\\0&-5&0\\-2&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\mathbf{0}$，解得基础解系为 $\xi_3=[1\quad0\quad-2]^{\mathrm{T}}$。因 ξ_1,ξ_2,ξ_3 已两两正交，故只需单位化，得 $\xi'_1=[0\quad1\quad0]^{\mathrm{T}}$，$\xi'_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&0&\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\xi'_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&0&-\frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，则所求的正交矩阵为 $Q=[\xi'_1\quad\xi'_2\quad\xi'_3]=\begin{bmatrix}0&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}$，故 $x=Qy$ 即为所求的正交变换，且有：$f=x^{\mathrm{T}}Ax=y^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}AQy=y^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&-3\end{bmatrix}y=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$。

四、论述题

15.**【参考答案】**

(1)精讲多练是当前数学课堂教学的主要做法。精讲，是针对教师讲解提出的，要求教师要精选典型问题作出讲解，对数学概念、定理中的关键点作出精辟讲解。讲解要少而精，要有针对性、代表性、普遍性，不搞一言堂，个别问题做个别教学。多练，是要求学生练习解题必须达到一定的数量。

建构性是数学学科的又一基本特性。所谓建构就是“建立”和“构造”，关于新知识认知结构的过程。“建立”一般是从无到有的兴建；“构造”，则是对已有资料、结构、框架加以调整、整合或重组。对建构主义来说，更是认为学习是学生依据自己已有的知识经验主动建构的过程；知识不能被动接受，不能被传递，需要学生主动的自我构建其意义，就数学学习而言，有意义的接受学习和有意义的发现学习是数学建构性学习的两个基本过程。

(2)第一，确立学生学习的主体地位。学生是学习的主体，所以在实际教学中，可以通过学生学习的积极性、自主性、探索性、深刻性等方面衡量是否真正确立和发挥了学生学习的主体性。

第二，教师要为学生自主建构而精讲。教师要善于创设数学问题情境，引导学生经历观察、实验、归纳、猜想、验证、应用等建构活动，不搞一言堂，进行民主教学，给学生自主建构留有充分的空间和时间。

第三，注重数学过程教学。正确的运用各项教学原则，有助于我们自觉的按照教学工作的客

观规律办事，在教学过程中充分发挥教师的主导作用和学生的主体作用，为全面提高数学教学质量创造条件。

五、案例分析题

16.**【参考答案】**

上述解答有两处错误，一是没有考虑到直线斜率不存在的情况，二是没有考虑到 k 为 0 的情况。

正确解法如下：

当直线斜率不存在时，直线方程为 $x=0$，即 y 轴，与抛物线 $y^2=2x$ 仅有一个交点，满足题意。当直线斜率存在时，设直线为 $y=kx+1$，则它与抛物线交点满足 $\begin{cases} y=kx+1 \\ y^2=2x \end{cases}$，消去 y 得 $(kx+1)^2-2x=0$，整理得 $k^2x^2+(2k-2)x+1=0$。因为直线与抛物线仅有一个交点，所以 $\begin{cases} k^2=0 \\ 2k-2\neq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k^2\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$，解得 $k=0$ 或 $k=\dfrac{1}{2}$，所以所求直线为 $y=1$ 或 $y=\dfrac{1}{2}x+1$。

综上可知，所求直线为 $x=0$ 或 $y=1$ 或 $y=\dfrac{1}{2}x+1$。

六、教学设计题

17.**【参考答案】**

(1)教学目标：

知识与技能目标：掌握点到直线的距离公式，能应用公式解决一些简单问题；

过程与方法目标：学生在实践中探索、观察、反思、总结，发现问题、解决问题，从而达到培养学生的观察能力、归纳能力、思维能力、应用能力和创新能力的目的。

情感态度与价值观目标：培养学生勇于探索、善于研究的精神，挖掘其非智力因素资源，培养其良好的数学学习品质。

教学重点：点到直线的距离公式及其应用；

教学难点：点到直线距离公式的推导。

(2)数学思想：运用数学化归思想与数形结合思想，将点到直线距离转化到三角形中高线的求解过程。

(3)教学设计：

(一)复习导入

复习如何判断两条直线的位置关系？如果两直线相交，又如何求出交点的坐标？这样有意识地涉及两直线垂直、两直线的交点等知识，既帮助学生整理、复习已学知识的结构，也让学生在复习过程中自己发现尚未解决的问题，使新授知识在原认知结构中找到生长点，自然地引出新问题，符合学生的认知规律，有利于学生形成合理、完善的认知结构。

(二)数形结合，解决问题

思考：如何求解点到直线的距离

问题1：(特殊情况)已知点 $P_0(x_0,y_0)$ 和直线 $l:Ax+By+C=0$，怎样求点 P 到直线 l 的距离呢？

当 $A=0$ 或 $B=0$ 时，直线方程为 $y=y_1$ 或 $x=x_1$ 的形式。(强调把点到直线的距离转化为点到点的距离，强调了转化思想，引导学生用学过的旧知识解决新问题)

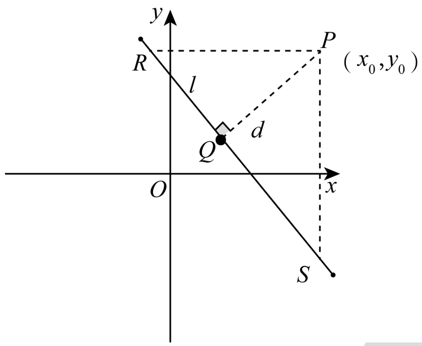
练习1：

点 $P(-1,2)$ 到直线 $3x=2$ 的距离是________。

问题2：设 $A\neq 0,B\neq 0$，我们进一步探求到直线的距离公式：

先讨论特殊点原点到直线距离公式(可以利用“等面积法”、“三角形相似的性质”或“解直角三角形”三种思路求解，再将其解题方法推广到一般的点，就会自然想到构造直角三角形进行求解了)。

【思路一】利用两点间距离公式：



设点 P 到直线 l 的垂线段为 PQ，垂足为 Q，由 $PQ \perp l$ 可知，直线 PQ 的斜率为 $\frac{B}{A}$（$A \neq 0$），根据点斜式写出直线 PQ 的方程，并由 l 与 PQ 的方程求出点 Q 的坐标；由此根据两点距离公式求出 $|PQ|$，得到点 P 到直线 l 的距离为 d。

此方法虽思路自然，但运算较繁。下面我们探讨另一种方法。

【思路二】构造直角三角形求其高

设 $A \neq 0, B \neq 0$，这时 l 与 x 轴、y 轴都相交，过点 P 作 x 轴的平行线，交 l 于点 $R(x_1, y_0)$；作 y 轴的平行线，交 l 于点 $S(x_0, y_2)$，由 $\begin{cases} Ax_1 + By_0 + C = 0 \\ Ax_0 + By_2 + C = 0 \end{cases}$ 得 $x_1 = \frac{-By_0 - C}{A}, y_2 = \frac{-Ax_0 - C}{B}$。所以，$|PR| = |x_0 - x_1| = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A}\right|, |PS| = |y_0 - y_2| = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{B}\right|$，则 $|RS| = \sqrt{PR^2 + PS^2} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{|AB|} \times |Ax_0 + By_0 + C|$，由三角形面积公式可知：$d \cdot |RS| = |PR| \cdot |PS|$，$\therefore d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$。

（注：计算两点间距离的过程中注意技巧，通分的重要性，没必要展开的尽量别展开）

（三）得出结论：点到直线的距离公式

$P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离：$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$。

思考：当 $A = 0$ 或 $B = 0$ 时，是否满足上述公式？（用此公式计算刚刚的练习 1，得出同样结果，因此得出结论当 $A = 0$ 或 $B = 0$ 时，公式仍然成立）。

练习 2：

1.求点 $A(-2,3)$ 到直线 $3x + 4y + 3 = 0$ 的距离；

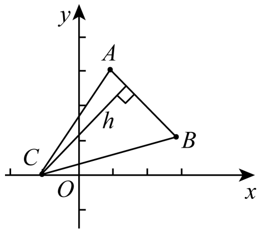
2.求点 $B(-5,7)$ 到直线 $12x + 5y + 3 = 0$ 的距离；

3.求点 $P_0(-1,2)$ 到直线 $2x + y - 10 = 0$ 的距离。

（在黑板板书一道题，剩下 2 道抽学生上黑板解答，注意学生的解题格式，并且在班上分析其解题过程，发现错误提醒全班学生）

练习 3：

书上例 6：已知点 $A(1,3)$，$B(3,1)$，$C(-1,0)$，求 $\triangle ABC$ 的面积。



练习 4：

1.点 $A(a,6)$ 到直线 $x+y+1=0$ 的距离为 4，求 a 的值。

（四）课堂小结：

平面内一点 $P_0(x_0,y_0)$ 到直线 $Ax+By+c=0$ 的距离公式是：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，再次强调：当 $A=0$ 或 $B=0$ 时，公式仍然成立。

（五）作业布置：P_{108}

2020 年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力（高级中学）考前冲刺密卷（二）

一、单项选择题

1. B **【解析】**利用等价无穷小，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$，故本题选 B。

2. B **【解析】**因为 $f'(x)=x^2+x+6$，所以 $f'(0)=6$，故过点 $(0,1)$ 的切线方程为 $y-1=6x$，因此该切线与 x 轴交点坐标为 $\left(-\dfrac{1}{6},0\right)$，故该题选 B。

3. D **【解析】**$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散；$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故本题选 D。

4. A **【解析】**因为矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{4}{1\times4-2\times3}&\dfrac{-2}{1\times4-3\times2}\\\dfrac{-3}{1\times4-2\times3}&\dfrac{1}{1\times4-2\times3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\\dfrac{3}{2}&-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$，故本题选 A。

5. B **【解析】**由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 构成矩阵 $\boldsymbol{A}$，则对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换如下：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\\boldsymbol{a}_2\\\boldsymbol{a}_3\\\boldsymbol{a}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\-1&1&-1&3\\5&-2&8&-9\\-1&3&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-5r_1}}\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&2&2&4\\0&-7&-7&-14\\0&4&4&8\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4\times\frac{1}{4}\\r_3-r_2\\r_4-r_2}]{\substack{r_2\times\frac{1}{2}\\r_3\times\left(-\frac{1}{7}\right)}}\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{R}(\mathbf{A})=2$，从而得向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 的秩为 2，故本题选 B。

6. C **【解析】**由正态分布性质，可得 $\dfrac{1-0.6826}{2}=0.1587$，故本题选 C。

7. A **【解析】**课程内容的学习，强调学生的数学活动，发展学生的数感、符号感、空间观念、统计观念以及应用意识与推理能力。数学教学活动必须建立在学生的认知发展水平和已有的知识经验的基础上，故本题选 A。

8. A **【解析】**古代美索不达米亚文明的主要文献是泥版，迄今已有约 50 万块泥版出土。现在泥版文书中大约有 300 多块是数学文献；以 60 进制为主的楔形文记数系统，长于计算。故本题选 A。

二、简答题

9. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y^3}{1-e^z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{3xy^2}{1-e^z}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{3y^2[(1-e^z)^2+xy^3e^z]}{(1-e^z)^3}$ 【解析】方程两边对 x 求偏导数，有 $e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^3=0$，即 $(e^z-1)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^3=0$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y^3}{1-e^z}$，类似地，方程两边对 y 求偏导数，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{3xy^2}{1-e^z}$，再求二阶混合偏导数，得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial z\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{3y^2(1-e^z)-y^3\left(-e^z\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{(1-e^z)^2}$，把上述 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 代入得：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{3y^2[(1-e^z)^2+xy^3e^z]}{(1-e^z)^3}$。

10. $a=c=2,b=-3,\lambda_0=1$ 【解析】由题意可知：$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\xi}=\lambda_0\boldsymbol{\xi}$，两端左乘 $\boldsymbol{A}$，有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\xi}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\xi}=-\boldsymbol{\xi}$，即 $\lambda_0\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$，于是有：$\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1\\\lambda_0(-5-b+3)=1\\\lambda_0(c-1-a)=-1\end{cases}$，解得 $a=c,b=-3,\lambda_0=1$，又因为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&-1&a\\5&b&3\\1-a&0&-a\end{vmatrix}=a-3=-1$，得 $a=c=2$，所以 $a=c=2,b=-3,\lambda_0=1$。

11. 交点为 $(1,0,-1)$；夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$ 【解析】由 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,1,-1)$，l 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(-1,1,2)$，$\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{s}|}=\dfrac{|-2+1-2|}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{1+1+4}}=\dfrac{1}{2}$，所以 Π 与 l 的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$。联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}\\2x+y-z-3=0\end{cases}$，解得交点为 $(1,0,-1)$。

12.【参考答案】

数学是研究现实数量关系和空间形式的科学，是研究模式与秩序的一门学科。其抽象性主要体现在以下几个方面：

(1)数学研究对象的高度抽象性：数学的研究对象（包括概念、定理、公理、法则等）是抽象的思想材料，这些材料是形式化地呈现出来的。例如：几何中的“直线”这一概念，并不是指现实世界中的拉紧的线，而是把现实的线的质量、弹性、粗细等性质都撇开了，只留下了“向两方无限伸长”这一属性，但是现实世界中是没有向两方无限伸长的线的。

(2)数学研究方法的高度抽象性：这不仅表现在数学中使用了大量抽象的数学符号，而且还表现在它的思维方法上。数学研究方法主要采用抽象思维方法，在表述数学的研究成果时采用的是演绎的方法。例如：虽然多次的精确测量等腰三角形的两底角都是相等的，但还是不能说已经证明了等腰三角形的底角相等，而必须采用逻辑推理的方法严格给予证明。

13.【参考答案】

(1)激发学生潜能，鼓励探索创新：要让学生在自主探索和合作交流过程中获得基本数学知识和技能，使他们觉得每项知识都是他们实践创造出来的，而不是教师强加给他们的。

(2)联系生活实际，培养学习兴趣：某些学生不想学习或讨厌学习，是因为他们觉得学习枯燥无味，认为学习数学就是把那些公式、定理、法则和解题规律记熟，然后反反复复地做题。新教材的内容编排切实体现了数学来源于生活又服务于生活的思想，通过生活中的数学问题或我们身边的数学事例来阐明数学知识的形成与发展过程。在教学过程中，教师要利用好教材列举的与我们生活息息相关的数学素材和形象的图表来培养学生的学习兴趣。教师要尊重学生，热爱学生，关心学生，经常给予学生鼓励和帮助。学习上要及时总结表彰，使学生充分感受到成功的喜悦，感受到学

习是一件愉快的事情。要通过自己的教学，使学生乐学、愿学、想学，感受到学习是一件很有趣的事情，值得为学习而勤奋，不会有一点苦的感觉。

(3)关注个体差异，促使人人发展：数学教育要面向全体学生，实现人人学有价值的数学，人人都能获得必需的数学，不同的人在数学上得到不同的发展。数学教育要促进每一个学生的发展，即要为所有学生打好共同基础，也要注意发展学生的个性和特长。由于各种不同的因素，学生在数学知识、技能、能力方面和志趣上存在差异，教师在教学中要承认这种差异，因材施教，因势利导。要从学生实际出发，兼顾学习有困难和学有余力的学生，通过多种途径和方法，满足他们的学习需求，发展他们的数学才能。设计如“思考”、“探索”、“讨论”等问题，教师可根据实际情况组织学生小组合作学习，在小组成员的安排上优、中、差各级知识水平学生要合理搭配，以优等生的思维方式来启迪差生，以优等生的学习热情来感染差生。在让学生独立思考时，要尽量多留一些时间，不能让优等生的回答剥夺差生的思考。对于数学成绩较好的学生，教师也可另外选择一些较灵活的问题让他们思考、探究，以扩大学生的知识面，提高数学成绩。

三、解答题

14．见解析 **【解析】**$\because$ $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$\therefore$ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = xf(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$，$F'(x) = \dfrac{xf(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f(x)\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$，化简可得：$F'(x) = \dfrac{f(x)\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$，

$\because$ $f(x)>0(x>0)$，$\therefore$ $\displaystyle\int_0^x f(x)\mathrm{d}t>0$，$\because$ $(x-t)f(t)>0$。$\therefore$ $\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t>0$，$\therefore$ $F'(x)>0(x>0)$，故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调递增函数。

四、论述题

15.**【参考答案】**

数学概念是客观事物中数与形的本质属性的反映，是导出数学定理和数学法则的逻辑基础，是提高解题能力的前提。通过讨论数学概念的合理性，培养学生思维的深刻性；通过对概念的完整性作进一步讨论，培养学生思维的严密性，从而提高学生的数学思维能力。

以高中《函数》为例进行分析。

一、数学概念的学习要以辨别为前提条件。所谓概念学习就是能概括出同类事物的共同本质特征。由于事物不仅在本质特征上有共同点，在非本质特征上也有共同点，这就给概念学习带来了困难，所以学习一个概念不仅要求学生学习与掌握一类事物的共同本质特征，而且要求他能排除非本质特征，如要及时排除学生认为“函数的定义域就是函数名称(或函数的定义)”这样一种错误认识。概念是反映事物的共同点，而辨别是反映事物的差异。所以概念的学习要以辨别为前提条件。据此，教师在讲完函数概念之后最好要设计一组辨析题给学生做，让学生经历充分的活动和体验后明白到底什么是函数？什么是函数的定义域、值域和对应法则。

二、数学概念教学重在把握概念的本质属性。对于函数，大多数学生都能说出它的定义，但要他们举出具体的函数，很多人只会举出有解析式的例子。在他们的头脑中存在着一种非本质属性泛化的错误观念：“有完整数学表达式的才是函数，除此之外就都不是函数”。这说明他们还没有真正掌握函数的本质特征。只有正确认识到“数集到数集上的对应关系”才是函数的本质属性，才是函数不变的性质。除此之外的一切都是可变的，那么函数的表达式就是可变的，并不是函数的本质。函数的表达式可以是独立的解析式，也可以是其它的形式，如数表形式、图像形式、箭头形式等。无论函数关系用什么形式表示，只要具备函数的本质特征，它就是函数。

三、数学概念的同化教学要重视“例证”的作用。高中函数概念就是对初中函数概念的同化。而同化过程是学习者认知结构中的原有观念与要学习的新观念相互作用的过程。原有观念的概括程度、包括的范围和巩固水平在新的学习中起决定作用。在教学时，教师先呈现概念的若干正

例，引导学生进行辨别，提出与检验假设，最后进行概括，得出同类事物的共同本质属性。在呈现若干正例的同时，必须根据学生现有认知结构水平随之呈现适当的反例(也可请学生举例)，如集合 $A=\{实数\}$，$B=\{正实数\}$，对应法则 $f:y=x^2$，则在对应法则 f 作用下，从 A 到 B 能形成函数吗？又如集合 $A=\{本校某班同学的姓名\}$，$B=\{座位号\}$，对应法则 f：分配座位，则在对应法则 f 作用下，从 A 到 B 能形成函数吗？正例呈现有助于学生进行概括，反例呈现有助于学生辨别，使概念概括精确化。举例的目的是为了便于学生证实已抽象出来的特征。简单地说，在概念形成中，例子帮助学生发现概念的本质属性，在概念同化中，例子支持学生对概念本质属性的理解。

四、要获得一个代数概念，使之成为一个数学实体，必须先经过一个相当长时期的操作性或过程性的阶段，然后进入结构性意义的建构，最后形成一个完全的代数对象。如函数概念同化教学可以进行如下设计：首选给出定义(揭示本质属性，给出名称和符号)，然后与原认知结构建立联系，明确新概念的内涵与外延，再与原有认知结构中的某些概念相区别，最后将新概念纳入原有的认知结构之中，原有的认知结构得到充实，通过练习巩固形成新的概念。遵循具体，抽象，再具体的教学规律。让学生经历领会到巩固再到应用的心理过程。贯彻概念的引入，概念的明确和理解，再达到概念的巩固和应用等基本教学环节。使学生感知概念，形成表象，通过分析、抽象和概括使学生明确和理解概念。通过练习、习题，使学生巩固和应用概念。

五、案例分析题

16.**【参考答案】**

(1)错误：由 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，不可以推出 $\angle A=60^\circ$，或者 $\angle A=120^\circ$。原因：对正弦诱导公式不熟悉。

(2)根据余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即 $(\sqrt{3})^2+1^2-2\sqrt{3}\cos30^\circ=1$，所以 $c=1$，又由正弦定理，得 $\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\angle A=60^\circ$ 或 120°。

① $\angle A=60^\circ$，$\angle C=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ$，故 $\triangle ABC$ 是直角三角形；

② $\angle A=120^\circ$，$\angle C=180^\circ-120^\circ-30^\circ=30^\circ$，故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形。

综上，$\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形。

措施：学生对于正弦函数诱导公式不能熟练掌握，可以依据学生易错题型，针对性训练。

六、教学设计题

17.**【参考答案】**

(1)教学目标：

①知识与技能目标：理解古典概型及其概率计算公式；

②过程与方法目标：通过模拟试验理解古典概型的特征、试验结果的有限性和每一个试验结果出现的等可能性，归纳总结出古典概型的概率计算公式，体现了化归的重要思想，掌握列举法，学会运用数形结合、分类讨论的思想解决概率的计算问题；

③情感、态度与价值观目标：了解随机现象与概率的意义，加强与实际生活的联系，以科学态度评价身边的一些随机现象。

教学重点：理解古典概型的概念及利用古典概型求解随机事件的概率；

教学难点：如何判断一个试验是否为古典概型，分清在一个古典概型中某随机事件包含的基本事件的个数和试验中基本事件的总数。

(2)教学简案：

(一)导入

在课前，教师布置任务，以数学小组为单位，完成下面两个模拟试验：

(1)试验一：抛掷一枚质地均匀的硬币，分别记录“正面朝上”和“反面朝上”的次数，要求每个数学小组至少完成20次(最好是整十数)，最后由课代表汇总；

(2)试验二：抛掷一枚质地均匀的骰子，分别记录“1 点”、“2 点”、“3 点”、“4 点”、“5 点”和“6 点”的次数，要求每个数学小组至少完成 60 次(最好是整十数)，最后由课代表汇总。在课上，学生展示模拟试验的操作方法和试验结果，并与同学交流活动感受。

教师最后汇总方法、结果。

(二)探究新知

提问：(1)如何用模拟实验的方法来求某一个随机事件的概率？(2)什么是基本事件？基本事件具有什么特点？

分小组讨论实验操作方法和结果，师生共同汇总方法、结果。

在试验一中随机事件只有两个，即“正面朝上”和“反面朝上”，并且它们都是互斥的，由于硬币质地是均匀的，因此出现两种随机事件的可能性相等，即它们的概率都是 $\frac{1}{2}$；

在试验二中随机事件有六个，即“1 点”、“2 点”、“3 点”、“4 点”、“5 点”和“6 点”，并且他们都是互斥的，由于骰子质地是均匀的，因此出现六种随机事件的可能性相等，即它们的概率都是 $\frac{1}{6}$。我们把上述试验中的随机事件称为基本事件，它是试验的每一个可能结果。基本事件有如下的两个特点：

(1)任何两个基本事件是互斥的；

(2)任何事件(除不可能事件)都可以表示成基本事件的和。

(三)巩固练习

完成课本例 2。

(四)课堂小结

引导学生总结归纳本节课要点。

(五)布置作业

思考“探究”栏目中问题，完成课后练习题。

(3)单选题选中概率 $P_1=\frac{1}{4}$，多选题正确答案可能有 1、2、3、4 个，总共有 $C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=15$ 种可能，选中的概率 $P_2=\frac{1}{15}$，故多选题选中概率更低。

2020 年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力(高级中学)考前冲刺密卷(三)

一、单项选择题

1. D **【解析】**洛必达法则：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2}=-\frac{1}{3}$，故本题选 D。

2. D **【解析】**判断函数在某一点 x_0 连续性的方法：$f(x_0^+)=f(x_0^-)=f(x_0)$，$f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}(1+x)=2$，$f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}2\sqrt{x}=2$，由已知 $f(1^+)=f(1^-)=f(1)=2$ 可知，$x=1$ 是 $f(x)$ 的连续点。故本题选 D。

3. A **【解析】**因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 为等比级数，其公比 q 满足 $|q|=\frac{\ln 3}{2}<\frac{\ln e^2}{2}=1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 收敛且和为 $\frac{1}{1-\frac{\ln 3}{2}}=\frac{2}{2-\ln 3}$。故本题选 A。

4. C 【解析】$y''-4y=0$ 的特征根 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2$，则其通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$。设其特解为 $y^*=Axe^{2x}$，代入 $y''-4y=e^{2x}$，可解得 $A=\frac{1}{4}$。所以通解为 $y=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}\right)xe^{2x}$，其中 C_1、C_2 为任意常数。故本题选 C。

5. B 【解析】跟自由未知量有关，由题意得出系数矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$，可知其秩为 2，未知数个数为 4，得自由未知量为 2，齐次线性方程组基础解系所含解向量的个数为 $4-2=2$，故本题选 B。

6. B 【解析】二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & c\end{pmatrix}$，由 $R(\boldsymbol{A})=2$，知 $|\boldsymbol{A}|=0$，解得 $c=3$。故本题选 B。

7. A 【解析】演绎推理是从一般规律出发，运用逻辑证明或数学运算，得出特殊事物应遵循的规律，即从一般到特殊的推理。归纳推理是由个别、特殊到一般的推理，通过实验验证结论和通过观察猜想得到结论的推理都是归纳推理。故本题选 A。

8. D 【解析】欧拉发现了著名的欧拉公式公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，故本题选 D。

二、简答题

9. 见解析 【解析】设有一组常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，两端左乘 $\boldsymbol{A}^{k-1}$，得 $\lambda_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，又 $\because$ $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，$\therefore$ $\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{k+2}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=\boldsymbol{A}^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，$\therefore$ $\lambda_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，$\because$ $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，$\therefore$ $\lambda_1=0$，将 $\lambda_1=0$ 代入上式得：$\lambda_2\boldsymbol{A\alpha}+\lambda_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，将上式左乘 $\boldsymbol{A}^{k-2}$，同上可证 $\lambda_2=0$，同理可证得：$\lambda_3=\lambda_4=\cdots=\lambda_k=0$，从而，得证向量组 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A\alpha}$，$\cdots$，$\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关。

10. $(e+e^{-1}-2)$；$\frac{\pi}{2}(e^2+e^{-2}-2)$ 【解析】曲线 $y=e^x$ 与 $y=e^{-x}$ 的交点为 $(0,1)$，曲线 $y=e^x$ 与 $y=e^{-x}$ 和直线 $x=1$ 的交点分别为 $(1,e)$ 和 $(1,e^{-1})$，取 x 为积分变量，变化范围为 $[0,1]$，所求面积为 $S=\int_0^1(e^x-e^{-x})\mathrm{d}x=(e^x+e^{-x})\Big|_0^1=(e+e^{-1}-2)$；旋转体体积为 $V=\pi\int_0^1(e^x)^2\mathrm{d}x-\pi\int_0^1(e^{-x})^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2+e^{-2}-2)$。

11. $P\{X=k\}=\left(\frac{3}{13}\right)^{k-1}\times\left(\frac{10}{13}\right)$ 【解析】根据题意可知，符合几何分布的特征，其中抽到合格品的概率 p 为 $\frac{10}{13}$，抽到次品的概率为 $q=1-p=\frac{3}{13}$，随机变量抽取的次数 X 服从参数为 p 的几何分布，因此可得分布律为 $P\{X=k\}=\left(\frac{3}{13}\right)^{k-1}\times\left(\frac{10}{13}\right)$。

12.【参考答案】

(1)依据高中数学课程理念，实现“人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展”，促进学生数学学科核心素养的形成和发展。

(2)依据高中课程方案，借鉴国际经验，体现课程改革成果，调整课程结构，改进学业质量评价。

(3)依据高中数学课程性质，体现课程的基础性、选择性和发展性，为全体学生提供共同基础，为满足学生的不同志趣和发展提供丰富多样的课程。

(4)依据数学学科特点，关注数学逻辑体系、内容主线、知识之间的关联，重视数学实践和数学文化。

13.【参考答案】

学科核心素养是育人价值的集中体现，是学生通过学科学习而逐步形成的正确价值观念、必

备品格和关键能力。数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现,是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现,是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的。

数学学科核心素养包括:数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。这些数学学科核心素养既相对独立、又相互交融,是一个有机的整体。

三、解答题

14. 见解析 **【解析】**证明:取函数 $f(x)=\ln x$,$f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续,在 (b,a) 内可导,由拉格朗日中值定理可知,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 即 $\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}=\frac{1}{\xi}(a-b)$,又 $0<b<\xi<a$,故 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$,因此 $\frac{a-b}{a}<\frac{a-b}{\xi}<\frac{a-b}{b}$,即 $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$。

四、论述题

15.**【参考答案】**

(1)重视学生数学学科核心素养的达成:教学评价要以数学学科核心素养的达成作为评价的基本要素。基于数学学科核心素养的教学要创设合适的教学情境、提出合适的数学问题。在设计教学评价工具时,应着重对设计的教学情境、提出的问题进行评价。

(2)重视评价的整体性与阶段性:基于学业质量标准和内容要求制定必修、选择性必修和选修课程的评价目标,关注评价的整体性。数学学科核心素养的达成是循序渐进的,基于内容主线对数学的理解与把握也是日积月累的。因此,应当把教学评价的总目标合理分解到日常教学评价的各个阶段,关注评价的阶段性。既要关注数学知识技能的达成,更要关注相关的数学学科核心素养的提升;还应依据必修、选择性必修和选修课程内容的主线和主题,整体把握学业质量与数学学科核心素养水平。

(3)重视过程评价:日常评价不仅要关注学生当前的数学学科核心素养水平,更要关注学生成长和发展的过程;不仅要关注学生的学习结果,更要关注学生在学习过程中的发展和变化。学生的知识掌握、数学理解、学习自信、独立思考等是随着学习过程而变化和发展的,只有通过观察学生的学习行为和思维过程,才能发现学生思维活动的特征及教学中的问题,及时调整学与教的行为,改进学生的学习方法和思维习惯。此外,教师还要注意记录、保留和分析学生在不同时期的学习表现和学业成就,跟踪学生的学习进程,通过过程评价使学生感受成长的快乐,激发其数学学习的积极性。

(4)关注学生的学习态度:良好的学习态度是学生形成和发展数学学科核心素养的必要条件,也是最终形成科学精神的必要条件。在日常评价中应把学生的学习态度作为教学评价的重要目标。在对学生学习态度的评价中,应关注主动学习、认真思考、善于交流、集中精力、坚毅执着、严谨求实等。与其他目标不同,学习态度是随时表现出来的、与心理因素有关的,又是日积月累的、可以变化的。在日常教学活动中,教师要关注每一个学生的学习态度,对于特殊的学生给予重点关注。可以记录学生学习态度的变化与成长过程,从中分析问题,寻求解决问题的办法。

五、案例分析题

16.**【参考答案】**

(1)教师1的教法是传统的教学方法,比较死板,没有认识到学生的认知水平,没有考虑到学生之间的个体差异。优点是在一个例题结束后,教师布置一道练习题进行巩固练习。教师2的教学完全符合新课标下的教学方式,将课堂交给学生,以学生为主体,老师为主导,引导学生诱发思考,循序渐进的启发学生,充分考虑到学生的个体差异,帮助学生打开思路。在课堂中采用师生互动合作的学习方式,并将学生解题方法呈现在黑板上,最后让学生补充其他的解题方法,充分尊重每一个学生的想法。但是这位老师的不足是在教学设计时没有考虑到用函数的方法解决此不等

式，课前没有考虑到解不等式的函数思想方法。

(2)教师1没有辩证的理解“预设与生成”的关系，只有“预设”、完全封闭、一切尽在“教师掌控之中”的现象，没有结合学生的认知水平和学生间的个体差异，造成不适当的“生成”，缺乏教师引导，影响课堂教学质量。

教师2体现了对教学过程的“预设”，集中表现在：能根据所教班级学生的实际情况，选择贴切的教学素材和教学流程，准确地体现基本理念和内容标准规定的要求。并把“预设”转化为实际的教学活动，在这个案例的过程中，师生双方的互动“生成”一些新的教学资源，教师2能够及时把握，因势利导，适时调整预案，使教学活动收到更好的效果。但是教师2不足的是没有仔细研究教材，忽略了用函数问题解答此不等式，没有把本节课进行适当拓展和深化。

(3)构造 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{9-x}(0\leqslant x\leqslant 9)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{9-x}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{9-x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{9-x}}\right)$，令 $f'(x)>0$，则 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{9}{2}$；令 $f'(x)<0$，则 $\dfrac{9}{2}<x\leqslant 9$。由 $f(x)$ 的单调性可知：$f(2)<f(3)$，即证 $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$。

运用函数证明该不等式的方法使我们意识到不等式与函数是紧密联系的，很多不等式问题往往有相关的函数背景，可以利用函数的思想解决。另一方面可以培养思维能力和逻辑推理能力。

六、教学设计题

17.**【参考答案】**

(1)教学目标：

①知识与技能：理解二倍角的变形公式推导半角的正弦、余弦公式的过程，掌握二倍角的正弦、余弦公式，并会利用公式进行简单的恒等变形；

②过程与方法：通过二倍角的变形公式推导半角的正弦、余弦公式，体会化归、换元、方程、逆向运用公式等数学思想，提高学生的推理能力；体会三角恒等变形在数学中的应用；

③情感态度与价值观：感受数学推理的严谨性，培养用数学思维思考问题的习惯，激发学生的学习兴趣。

教学重点：积化和差、和差化积、半角公式的推导；

教学难点：认识三角变换的特点，并能运用数学思想方法指导变换过程的设计。

(2)数学思想：转化思想、换元思想、逆向思想。

(3)教学设计

(一)复习导入：三角函数的和(差)公式，倍角公式。

(二)新课讲授：

1.由二倍角公式引导学生思考：α 与 $\dfrac{\alpha}{2}$ 有什么样的关系？

学习和(差)公式，倍角公式以后，我们就有了进行变换的新工具，从而使三角变换的内容、思路和方法更加丰富，这为我们的推理、运算能力提供了新的平台。

例1：试以 $\cos\alpha$ 表示 $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$，$\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$

解：我们可以通过二倍角 $\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1$ 和 $\cos\alpha=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ 来做此题。因为 $\cos\alpha=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$，可以得到 $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$；因为 $\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1$，可以得到 $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$，又因为 $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$。

思考:代数式变换与三角变换有什么不同?

例 2:已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$,且 α 在第三象限,求 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值。

例 3:求证:

(1) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$;

(2) $\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$。

证明:(1)因为 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\sin(\alpha-\beta)$ 是我们所学习过的知识,因此我们从等式右边着手:$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$;$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$,两式相加得 $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$;即 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$。

(2)由(1)得 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$ ①;设 $\alpha+\beta=\theta$,$\alpha-\beta=\varphi$,那么 $\alpha=\frac{\theta+\varphi}{2}$,$\beta=\frac{\theta-\varphi}{2}$,把 α,β 的值代入①式中得 $\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$。

思考:在例 3 证明中用到哪些数学思想?

例 3 证明中用到换元思想,(1)式是积化和差的形式。(2)式是和差化积的形式,在后面的练习当中还有六个关于积化和差、和差化积的公式。

(三)巩固练习:P_{142} 面 1、2、3 题。

(四)课堂小结:要对变换过程中体现的换元、逆向使用公式等数学思想方法加深认识,学会灵活运用。

(五)布置作业:《习案》三十三。

(4)对例 2(2)给出另一种证明如下:

证明:$2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$

$=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)$

$=2\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)$

$=2\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$

$=2\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)=\sin\theta+\sin\varphi$

即原式得证。