中等职业教育课程改革国家规划新教材

全国中等职业教育教材审定委员会审定

数学

SHUXUE

下册

基础模块

语文出版社

编写说明

中等职业教育课程改革国家规划新教材《数学》是根据教育部2009年颁布的《中等职业学校数学教学大纲》规定的课程教学目标和教学内容，紧密结合中等职业学校教学实际和学生实际而编写的。根据大纲规定的三个模块的教学内容和要求，本套教材分为《数学（基础模块）》（上、下册），《数学（职业模块）》（工科类分册、服务类分册）及《数学（拓展模块）》，共五册教材。

本教材为《数学（基础模块）》，计划学时数为128学时，其中上册60学时，下册68学时。基础模块是教学大纲中规定的各专业学生必修的基础性内容和应达到的基本要求，基于基础模块的教学内容要求及中职数学教学实际，本教材的编写特色体现在以下几个方面：

1. 从中职数学教学的特点出发，加强教材的基础性、实用性和灵活性。

新教材适用于不同地区、不同类型的职业学校，为不同专业，不同水平，不同发展需求的学生提供适宜的学习平台。根据新大纲的教学要求，教材的编写更加突出知识的基础性、应用性以及学生获取知识手段的多样性，其表现为知识低难度，教材叙述、例题的选择尽量贴近职校生的学习与生活实际，体现了时代的特色，体现了“实用为主、够用为度”的编写理念。

2. 着眼于中职数学教学的实际，通过“低起点、巧衔接”的编写手法，力求实现学生乐于学，教师便于教的目标。

教材编写遵循学生认知发展的规律，降低知识的起点，由已知到未知，由浅入深，由具体到抽象。教材编写既关注与初中数学知识的衔接，又兼顾与专业课程内容的衔接。例如，教材在每一章起始安排了“回顾与思考”和相应的问题情境，使学生在已有经验的回顾或问题情境中，自然进入新知识的学习、探索。又如，“工具箱”栏目帮助学生适时回忆已有知识，为有效运用知识经验提供了帮助，同时教师也可以通过此栏目帮助有困难的学生复习旧知识，体现了教材的弹性；例题的讲解深入浅出、并尽量将“步子”迈得小一些，使学生接受起来容易一些，教师教学方便一些；每章的“归纳与

总结”，适当设计了条件填充或结论填充，为学生提供了数学学习方法的指导。

3. 注重学生的参与，活跃学生的思维，为学生终身发展打基础。

通过多年的教材编写及教学实践反馈，我们感受到数学教师在教学设计的过程中均力争将课堂变成师生共同活动的场所，越发强调学生的参与。因此教材在知识形成过程中设计了“试一试”“想一想”“议一议”“练一练”等环节，通过师生动手实验、合作交流，让学生的思维活跃起来，积极参与到教学过程中来。这样，既希望实现学生学会，又希望通过学习过程实现学生会学，为学生的终身发展奠定基础。

4. 注重教材的可读性，培养学生的学习兴趣、价值观和人文精神。

在保证科学性的基础上，教材写作尽量运用贴近学生的语言，增加趣味性。教材中的“学习小贴示”（小常识、名词解释）“阅读空间”（数学名人轶事、数学发展简介、数学与其他学科的联系、趣味性较强的数学应用题等），既通俗易懂又生动有趣，意在开阔学生的眼界、提高学生数学学习兴趣、培养学生价值观和人文精神。

5. 突出数学与现代信息技术的结合，体现教材的现代性。

随着现代信息技术不断更新发展，数学教学手段、方法也在不断的更新、并且更加便捷，学生解决数学问题的方法也更加多样。本教材的编写强调与信息技术的结合，如“数学实验”等内容的设置便是强调计算器、计算机软件等信息技术的使用，意在培养学生的计算能力和数据处理能力，同时为教师教学提供更为直观、高效的教学手段。

6. “三合一”功能的教参，导学性强大的学生学习指导用书。

教参的编写将教材分析与教学建议、教学资源开发与利用、教学研究拓展三者合为一体，为帮助教师理解教材，实现数学课堂教学的优化设计与有效实施，提供了丰富的指导性意见及参考资料。同时各册教参均配有教学指导光盘，以提高教师备课效率。学生学习指导用书除了具备作业册的功能外，还具备复习、总结的功能，提高了学生的学习效率和能力。

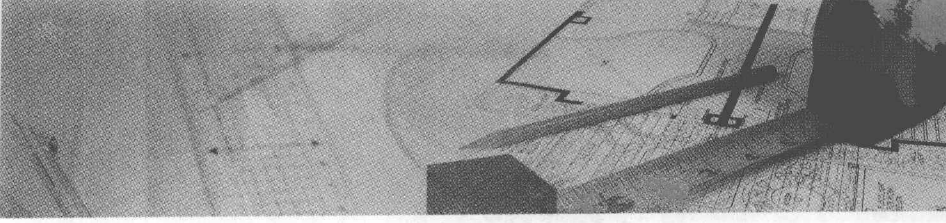
为了编写出高质量、高水平的中等职业教育课程改革国家规划新教材，我社成立了中等职业教育课程改革国家规划新教材编写委员会，编委会主任：王旭明、王晓庆；编委会委员（以姓氏笔划为序）：王立善、王社光、

方鸣、尹江峰、邓弘、石林百、向伟、李秋芳、张建虹、张景斌、张程、金朝晖、赵大鹏、赵贝、赵曾、柯敬贵、龚双江、彭世东、董强、惠和兴、戴宗显。

衷心希望广大中等职业学校的老师、同学在使用这套教材的过程中有什么意见与建议及时跟我们反馈，我们愿意和您们一道，为提高中等职业教育数学教学水平而努力。

语文出版社

2009年11月



目录

目录

第六单元　数　列

回顾与思考

国际象棋起源于古代印度，棋盘上共有8行8列，构成64个格子. 国王要奖赏国际象棋的发明者，问他有什么要求，发明者说：“请在棋盘的第1个格子里放上1颗麦粒，在第2个格子里放上2颗麦粒，在第3个格子里放上4颗麦粒，在第4个格子里放上8颗麦粒，依此类推，每个格子里放的麦粒数都是前一个格子里放的麦粒数的2倍，直到第64个格子，请给我足够的粮食来实现上述要求”. 国王觉得这并不是很难办到的事，就欣然同意了他的要求.

国王真的有能力满足国际象棋发明者上述的要求吗？让我们来分析一下：

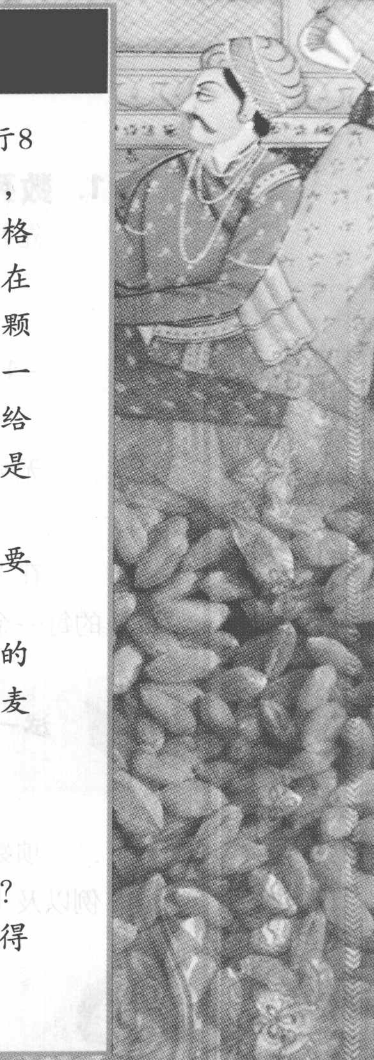
由于每个格子里的麦粒数都是前一个格子里的麦粒数的2倍，且共有64个格子，每个格子里的麦粒数依次是

$$1，2，2^2，2^3，\cdots，2^{63}$$

即国王要给发明者$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}$颗麦粒.

那么这个和数是多少呢？

学习了数列的知识，你就会得到答案.



6.1 数列的概念

引例

我们来做一个游戏：在沙滩上用小石子摆成下面的图形，如图 6－1 所示，

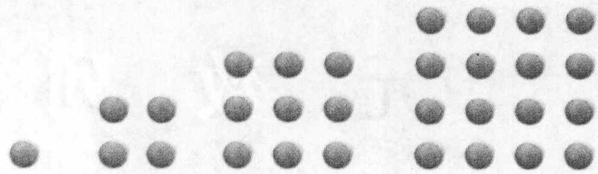


图 6－1

组成上面每个图形的石子数构成了一列数：1，4，9，16.

1. 数列的概念

先看几个例子，正整数 1，2，3，4，5 的倒数排成一列数：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}. \qquad ①$$

－1 的 1 次方，2 次方，3 次方，4 次方，……排成一列数：

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots. \qquad ②$$

无穷多个 5 排成一列数：

$$5,\ 5,\ 5,\ 5,\ \cdots. \qquad ③$$

在上面的例子中，像这样按一定顺序排列的一列数叫做**数列**. 数列中的每一个数都叫做这个数列的**项**.

试一试 你能举出几个现实生活中与数列有关的例子吗？

项数有限的数列叫做**有穷数列**，项数无限的数列叫做**无穷数列**. 如引例以及上面的数列①就是有穷数列，数列②，③则是无穷数列.

想一想

根据数列的定义，判断下面各题中的两个数列是否是相同的数列：

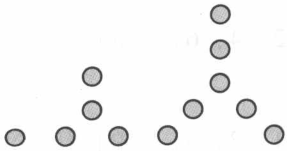
(1) 数列 0，1，2，3，4，5，…和数列 1，2，3，4，5，…；

(2) 数列 1，2，3，4，5，…和数列 1，2，3，4，5；

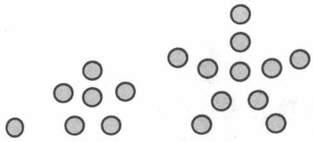
(3) 数列 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}$ 和数列 $\frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1$.

练习

1. 根据下列图形及相应的点数，在空格和括号中分别填上适当的图形和点数：

(1)  ________ ________；

1　　4　　7　　(　)　　(　)

(2)  ________ ________

1　　6　　11　　(　)　　(　)

2. 写出下列各数列，并分别指出哪些数列是有穷数列，哪些数列是无穷数列？
   (1) 自然数 1，2，3，4，5 的平方排成一列数；
   (2) 整数 -4，-3，-2，-1，0 的绝对值排成一列数；
   (3) 正整数 1，2，3，4，5，…的倒数的平方排成一列数；
   (4) 正整数 1，2，3，4，5，…的立方根排成一列数．

2. 数列的通项公式

由于数列的项都是按一定顺序排列的，因此每一项都占有一个不同的序号．对于下面的数列，每一项与它的序号有下面的对应关系：

$$\begin{array}{ccccc} \text{项} & 1 & 4 & 9 & 16 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{序号} & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

在数列相应序号的位置上的项依次叫做这个数列的第 1 项（或首项），第 2 项，第 3 项，…，第 n 项，…，并依次用 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…来表示．因此数列的一般形式可写成

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots.$$

通常把第 n 项 a_n 叫做**数列的通项**，并把数列简记为$\{a_n\}$．例如，

把数列　2，3，4，5，…，$n+1$，…，简记为数列$\{n+1\}$．

把数列　$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$，简记为数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

如果数列$\{a_n\}$的第n项a_n与序号n之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的**通项公式**，其中序号$n\in\mathbf{N}_+$. 例如，

把正整数从小到大排成数列1，2，3，…的通项公式是

$$a_n=n;$$

把正偶数从小到大排成数列2，4，6，…的通项公式是

$$a_n=2n;$$

把正奇数从小到大排成数列1，3，5，…的通项公式是

$$a_n=2n-1.$$

试一试

请写出下列每个数列的一个通项公式：

(1) $-1,1,-1,1,\cdots$;　　(2) $5,5,5,5,\cdots$;

(3) $-1,0,1,2,3,\cdots$;　　(4) $-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$.

知道了一个数列的通项公式后，只要依次用正整数1，2，3，…去代替公式中的n，就可以求出这个数列的各项．因此，已知数列的通项公式，就等于知道了数列的每一项．

例1 已知下面数列$\{a\}$的通项公式，分别写出它们的前5项和第10项：

(1) $a_n=\dfrac{2n}{2n+1}$;

(2) $a_n=(-1)^n\cdot(2n-1)$.

解：(1) 在通项公式中依次取$n=1,2,3,4,5,10$，可得到

$$a_1=\frac{2\times1}{2\times1+1}=\frac{2}{3},a_2=\frac{2\times2}{2\times2+1}=\frac{4}{5},a_3=\frac{2\times3}{2\times3+1}=\frac{6}{7},$$

$$a_4=\frac{2\times4}{2\times4+1}=\frac{8}{9},a_5=\frac{2\times5}{2\times5+1}=\frac{10}{11},a_{10}=\frac{2\times10}{2\times10+1}=\frac{20}{21}.$$

(2) 在通项公式中依次取$n=1,2,3,4,5,10$，可得到

$$a_1=(-1)^1\times(2\times1-1)=-1,a_2=(-1)^2\times(2\times2-1)=3,$$

$$a_3=(-1)^3\times(2\times3-1)=-5,a_4=(-1)^4\times(2\times4-1)=7,$$

$$a_5=(-1)^5\times(2\times5-1)=-9,a_{10}=(-1)^{10}\times(2\times10-1)=19.$$

例2 写出下面数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1) 3，5，7，9；

(2) $\frac{2^2-1}{2}$，$\frac{3^2-1}{3}$，$\frac{4^2-1}{4}$，$\frac{5^2-1}{5}$；

(3) $\frac{1}{1\times2}$，$-\frac{1}{2\times3}$，$\frac{1}{3\times4}$，$-\frac{1}{4\times5}$．

分析：已知数列的前几项，求它的一个通项公式，主要通过分析、比较，去发现每一项与它的序号之间的关系，从而归纳出 a_n 与 n 之间的对应关系式．

解：(1) 这个数列的前 4 项都是序号的 2 倍加 1，所以它的一个通项公式是 $a_n=2n+1$；

(2) 这个数列的前 4 项的分母都是序号加上 1，分子是分母的平方减去 1，所以它的一个通项公式是 $a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}$；

(3) 这个数列的前 4 项的绝对值都是序号与序号加 1 的积的倒数且奇数项为正，偶数项为负，所以它的一个通项公式是 $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$．

议一议

数列通项公式中 a_n 与序号 n 之间的关系是否可以看做是一个函数？如果是，讨论一下函数的定义域．

学习小贴示

与函数一样，数列也可以用列表、图像等方法来表示．数列的图像是一系列离散的点．例如：把正偶数按从小到大的顺序排成数列 2，4，6，…，可以用列表法和图像法分别表示，如下表及图 6－2 所示．

n	1	2	3	…	k	…
a_n	2	4	6	…	$2k$	…

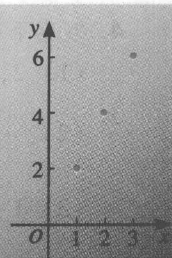


图 6－2

练习

1. 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它们的前 5 项：

(1) $a_n=\frac{1}{n^2}$；　　(2) $a_n=10n$；

(3) $a_n=5\times(-1)^{n+1}$；　　(4) $a_n=1+(-1)^n$.

2. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并对每一数列各写出一个通项公式：

(1) 2，4，(　　)，8，10，(　　)，14，…；$a_n=$________；

(2) (　　)，4，9，16，25，(　　)，49，…；$a_n=$________；

(3) 1，$\sqrt[3]{2}$，(　　)，$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[3]{5}$，$\sqrt[3]{6}$，$\sqrt[3]{7}$，…；$a_n=$________.

3. 根据数列的通项公式填表：

n	1	2	…	6	…	…	n
a_n			…		…	29	…	$3n-1$

习题 一

1. 根据数列$\{a_n\}$的通项公式，分别写出其前 5 项和第 20 项：

(1) $a_n=n^3(-1)^{n-1}$；　　(2) $a_n=\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$；

(3) $a_n=n^{\frac{1}{n}}$；　　(4) $a_n=\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

2. 写出下面各数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{6}{3}$，$\dfrac{9}{4}$，$\dfrac{12}{5}$；　　(2) $-\dfrac{1}{2\times1}$，$\dfrac{1}{2\times2}$，$-\dfrac{1}{2\times3}$，$\dfrac{1}{2\times4}$；

(3) $\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$-\sqrt{5}$；　　(4) 0，2，4，6.

3. 已知无穷数列 1×2，2×3，3×4，…，$n(n+1)$，…

(1) 求这个数列的第 10 项，第 31 项，第 48 项；

(2) 420 是这个数列的第几项？

4. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并写出每个数列的一个通项公式：

(1) 2，4，(　)，16，32，(　)，128，…；$a_n=$________；

(2) -1，$\dfrac{1}{2}$，(　)，$\dfrac{1}{4}$，$-\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{6}$，(　)，…；$a_n=$________；

(3) $1-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$，(　)，$\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}$，(　)，…；$a_n=$________；

(4) 1，$\sqrt{2}$，(　)，2，$\sqrt{5}$，(　)，$\sqrt{7}$，…；$a_n=$________.

阅读空间

斐波那契数列


◎斐波那契

“斐波那契数列”的发明者，是意大利数学家列昂纳多·斐波那契（Leonardo Fibonacci，约1170—约1250）．他生于比萨，被人称做“比萨的列昂纳多”．早年斐波那契随父亲到相当于今日的阿尔及利亚地区经商，在一个阿拉伯老师的指导下研究数学，掌握了印度数码这一新的计数体系，后来他还在埃及、叙利亚、希腊、西西里和法国等地研究数学．1202年，他撰写了《算盘书》一书，对印度——阿拉伯数码和阿拉伯数学在欧洲的流传起到了重要的作用．

《算盘书》在1228年的修订本中增加了脍炙人口的“兔子问题”，即一般而言，兔子在出生两个月后，就有繁殖能力，一对兔子每个月能生出一对小兔子．如果所有的兔子都不死，那么一年以后可以繁殖多少对兔子？这个问题导致了著名的“斐波那契数列”的诞生．

我们不妨拿新出生的一对小兔子分析一下：

第一个月小兔子没有繁殖能力，所以还是一对；

两个月后，生下一对小兔，总数共有两对；

三个月以后，老兔子又生下一对小兔，因为小兔子还没有繁殖能力，所以一共是三对；

……

以此类推可以列出下表：

经过月数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
兔子对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

表中数字1，1，2，3，5，8，…构成了一个数列，即斐波那契数列．这个数列有个十分明显的特点，那就是：前面相邻两项之和，构成了后一项．这个数列又因为以兔子繁殖为例而引入，故又称为“兔子数列”．

斐波那契数列有很多奇妙的属性，比如：随着数列项数的增加，前一项与后一项之比越来越逼近黄金分割数0.6180339887……；从第二项开始，每个奇数项的平方都比前后两项之积多1，每个偶数项的平方都比前后两项之积少1.

斐波那契数列在自然界中也有很多实例，比如：

（1）树木的生长，由于新生的枝条，往往需要一段“休息”时间，供自

身生长，而后才能萌发新枝．所以，一株树苗在一段间隔，例如一年，以后长出一条新枝；第二年新枝“休息”，老枝依旧萌发；此后，老枝与“休息”过一年的枝同时萌发，当年生的新枝则次年“休息”．这样，一株树木各个年份的枝丫数，便构成斐波那契数列．这个规律，就是生物学上著名的“鲁德维格定律”．

（2）如果你对植物稍稍注意，就会发现大多数花朵的花瓣数目是3，5，8，13，21，…例如，百合花是三瓣，梅花是五瓣，飞燕草是八瓣，孤挺花是十三瓣，向日葵不是21瓣，就是34瓣，雏菊都是34，55，或89瓣，其他数目则很少出现．如果以后看到某种花，不妨你也数数看．

6.2 等差数列

引例

（1）用棋子摆成“T”字，如图6－3所示，

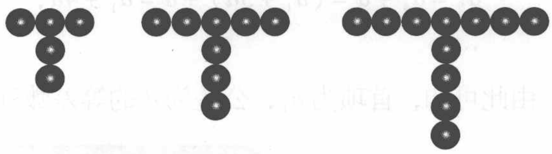


图 6－3

把这3个“T”字所用棋子的个数列出来，便得到了数列：

$$5，8，11. \qquad ①$$

（2）在2008年北京奥运会上，女子举重项目共设置了7个级别，其中较轻的4个级别的体重（单位：kg）组成数列：

$$48，53，58，63. \qquad ②$$

1. 等差数列的定义与通项公式

从引例中我们可以看出：从第2项起数列①中的每一项都比它的前一项多3；数列②中的每一项都比它的前一项多5.

因此，上述数列都具有这样共同的特征：从第2项起，每一项与它前一项的差都等于同一个常数.

一般地，如果一个数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

从第2项起，每一项与它前一项的差都等于同一个常数 d，即

$$a_{n+1}-a_n=d \ (n\in \mathbf{N}_+)$$

那么，这个数列叫做**等差数列**，常数 d 叫做等差数列的**公差**.

引例中的两个数列都是等差数列，它们的公差分别是3和5.

想一想

如果等差数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 的公差是 d，那么等差数列 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1$ 的公差是多少？

如果一个数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

是等差数列，它的公差是 d，那么

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$a_5=a_4+d=(a_1+3d)+d=a_1+4d,$$
$$\cdots.$$

由此可知，首项为 a_1，公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可以表示为

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d}$$

试一试

如果一个等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 5，公差是 -1，那么它的通项公式是什么？

等差数列的通项公式给出了等差数列中 a_1，a_n，d 和 n 之间的关系．如果知道其中的三个量，就可以求出另一个量．

例1 指出下列数列中的等差数列，并求出公差和通项公式：

(1) -2，2，6，10，14，…；　　(2) 1，4，16，64，256，…；

(3) 2，2，2，2，2，…；　　(4) 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，….

分析： 以上数列如果是等差数列就必须满足等差数列的定义，即从第 2 项起，每一项与它前一项的差都等于同一个常数，经验算知，数列 (1)，(3) 是等差数列．

解： 由等差数列的定义可以判定 (1)，(3) 是等差数列．

数列 (1) 中的公差 $d=4$，通项公式是 $a_n=-2+(n-1)\times 4$，即 $a_n=4n-6$；

数列 (3) 中的公差 $d=0$，通项公式是 $a_n=2$.

例2 求等差数列 8，5，2，…的第 15 项．

分析： 因为等差数列的 a_1，a_2，a_3 是已知的，所以可以通过 a_2-a_1 或 a_3-a_2 求出公差 d，有了 a_1 和 d，利用通项公式就可以求出这个数列的第 15 项．

解： $\because a_1=8$，$d=5-8=-3$，$n=15$，

$\therefore a_{15}=8+(15-1)\times(-3)=-34.$

例3 等差数列 -5，-9，-13，…中的第几项是 -401？

分析： 通过 a_2-a_1 或 a_3-a_2 求出公差 d，问题转化为已知 a_1，d，a_n，求 n.

解： $\because a_1=-5$，$d=-9-(-5)=-4$，$a_n=-401$.

$\therefore -401=-5+(n-1)\times(-4)$，

解得 $n=100$.

即这个数列的第 100 项是 -401.

例4 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_5=10$，$a_{12}=31$，求首项 a_1 和公差 d，并求出该数列的第 21 项 .

分析： 要求首项 a_1 和公差 d，可以采用列方程组的方法求出，进而再根据通项公式求出该数列的第 21 项 .

解： 根据题意，得

$$\begin{cases} a_1+4d=10, \\ a_1+11d=31. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} a_1=-2, \\ d=3. \end{cases}$$

$\therefore$ 这个等差数列的通项公式为 $a_n=-2+(n-1)\times3$.

因此 $a_{21}=-2+(21-1)\times3=58$.

即这个数列的首项 $a_1=-2$，公差 $d=3$，该数列的第 21 项是 58.

议一议 根据 $a_5=10$ 和 $a_{12}=31$，能否直接求出公差 d？由此怎样求出首项 a_1？

例5 在 -3 与 7 之间插入一个数 A，使 -3，A，7 成等差数列 .

分析： 根据等差数列的定义，从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，列出方程即可求得 A.

解： $\because -3$，A，7 成等差数列，

$\therefore A-(-3)=7-A$，

$2A=4$，

解得 $A=2$.

一般地，如果在 a 与 b 之间插入一个数 A，使 a，A，b 成等差数列，

那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**.

在例5中，数2就叫做 -3 与7的等差中项.

如果 A 是 a 与 b 的等差中项，那么 $A-a=b-A$，所以

$$A=\frac{a+b}{2}$$

容易看出，在等差数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…中，

$$a_2=\frac{a_1+a_3}{2},$$

$$a_3=\frac{a_2+a_4}{2},$$

…，

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}.$$

这就是说，在一个等差数列中，从第2项起，每一项（有穷等差数列的末项除外）都是它的前一项与后一项的等差中项.

想一想

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) a_3 是不是 a_1 与 a_5 的等差中项？

(2) a_4 可以看做是哪两项的等差中项？

***例6** 已知三个数成等差数列，它们的和为12，它们的积为60，求这三个数.

分析：如果已知三个数成等差数列，并且知道它们的和，通常设这三个数为 $a-d$，a，$a+d$，其中 d 是公差. 这样表示具有对称性，可以使运算简化，这是一个重要的方法.

解：设这三个数为 $a-d$，a，$a+d$.

$\because\ (a-d)+a+(a+d)=12$,

$\therefore\ a=4$.

即所求的三个数为 $4-d$，4，$4+d$.

又 $\because\ (4-d)\times4\times(4+d)=60$,

$\therefore\ d=\pm1$.

因此，所求的三个数为3，4，5或5，4，3.

练习

1. 填空题：

(1) 已知等差数列 11，6，1，…，则 $a_n =$ ________；

(2) 已知等差数列 3，7，11，…，则 $a_{11} =$ ________.

2. 求下列各组数的等差中项：

(1) 4 和 7；　　(2) $-\dfrac{2}{3}$ 和 $\dfrac{3}{4}$；　　(3) $\sqrt{3}+1$ 和 $\sqrt{3}-1$.

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_3=9$，$a_6=0$，求首项 a_1 和公差 d，并求出该数列的第 10 项.

2. 等差数列的前 n 项和

试一试

(1) 物流货运站堆放着一批钢管，如图 6－4所示，货运站的管理人员如何才能又快又准确地计算出这批钢管的总数？

(2) 和你的同学比一比，看看谁能以最快的速度求出 $1+2+3+\cdots+100$ 等于多少.

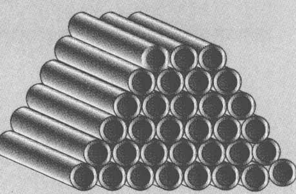


图 6－4

对于问题（1），也就是求下面 6 个数：3，4，5，6，7，8 的和．当然依次相加可以算出它的结果，但是如果层数很多时，这样求和就非常麻烦了．现在我们假设在这堆钢管旁边倒放着同样一堆钢管，如图 6－5 所示.

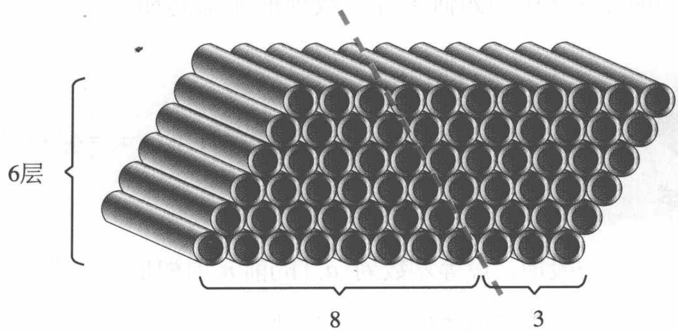


图 6－5

从图中可以看出每层的钢管数都相等，即

$$3+8=4+7=5+6=11.$$

由于共有 6 层，两堆钢管的总数是 $(3+8)\times 6$，因此所求的钢管总数是 $\dfrac{(3+8)\times 6}{2}=33$.

这个问题就可以看做是求等差数列 3，4，5，…的前 6 项和.

学习小贴示

高斯（C. F. Gauss，1777. 4.30—1855.2.23），德国著名数学家、物理学家、天文学家，有数学王子的美誉，并被誉为历史上伟大的数学家之一，和阿基米得、牛顿，同享盛名.

◎高斯

对于问题（2），著名数学家高斯在 10 岁时就能很快地求出它的结果，高斯的算法是：

首项与末项的和：$1+100=101$，

第 2 项与倒数第 2 项的和：$2+99=101$，

第 3 项与倒数第 3 项的和：$3+98=101$，

…，

第 50 项与倒数第 50 项的和：$50+51=101$，

于是，所求的和是 $101\times\dfrac{100}{2}=5050$.

这个问题就可以看做是求等差数列 1，2，3，…，n，…的前 100 项和.

在上面两个问题的求解中，我们发现所求的和可用首项、末项以及项数 n 来表示，且任意的第 k 项与倒数第 k 项的和等于首项与末项的和，这可以启发我们如何求等差数列前 n 项的和.

试一试

任选一个等差数列，请同学们验证：$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$.

一般地，设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]. \quad ①$$

再把各项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + [a_n - (n-1)d]. \qquad ②$$

把①，②两式的两边分别相加，得

$$2S_n = \overbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}^{n\text{个}(a_1+a_n)} = n(a_1 + a_n).$$

由此得到，等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

学习小贴示

这种推导等差数列前 n 项和公式的方法叫做“倒序相加法”.

由于 $a_n = a_1 + (n-1)d$，所以 S_n 又可以表示成

$$\boxed{S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d}$$

上面两个求和公式给出了等差数列中 a_1，a_n，d，n，S_n 之间的关系，并且知道其中的三个量就可以通过前 n 项和公式及通项公式求出另外两个量.

例7 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

（1）已知 $a_1 = 1$，$a_{10} = 10$，求 S_{10}；

（2）已知 $a_1 = 3$，$d = -\frac{1}{2}$，求 S_{10}.

分析：（1）由已知条件可知，应选择公式 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 求解.

（2）由已知条件可知，应选择公式 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ 求解.

解：（1）$\because a_1 = 1$，$a_{10} = 10$，$n = 10$，

$$\therefore S_{10} = \frac{n(a_1 + a_{10})}{2} = \frac{10(1+10)}{2} = 55.$$

（2）$\because a_1 = 3$，$d = -\frac{1}{2}$，$n = 10$，

$$\therefore S_{10} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 10 \times 3 + \frac{10(10-1)}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{2}.$$

例8 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$d = 2$，$a_n = 1$，$S_n = -8$，求 n.

分析：根据已知条件不能单独使用通项公式或前 n 项和公式求 n，因此需采用列方程组的方法求解.

解：把 $d=2$，$a_n=1$，$S_n=-8$ 分别代入等差数列的通项公式与前 n 项和公式，得

$$\begin{cases} a_1+2(n-1)=1, & ① \\ na_1+n(n-1)=-8. & ② \end{cases}$$

由①，得　$a_1=3-2n$.　③

把③代入②，并化简，得

$$n^2-2n-8=0.$$

$\therefore$　$n=4$ 或 $n=-2$.

由于项数不能是负数，所以应把 $n=-2$ 舍去，即 $n=4$.

练一练

求下列等差数列的和：

(1) $1+4+7+\cdots+28$;　　(2) $2+6+10+\cdots+38$.

练 习

1. 根据下列等差数列 $\{a_n\}$ 的条件填空：

(1) $a_1=5$，$a_{10}=95$，则 $S_{10}=$ ________；

(2) $a_1=100$，$d=-2$，则 $S_{50}=$ ________.

2. 等差数列 5，4，3，2，…的前多少项的和是 -30？

习题 二

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) $a_5=-1$，$a_8=2$，求 a_1 和 d；

(2) $a_1=12$，$a_6=27$，求 d；

(3) $d=-\dfrac{1}{3}$，$a_7=8$，求 a_1；

(4) $a_1+a_6=12$，$a_7=7$，求 a_9.

2. 根据下列各题中的条件，求相应等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n：

(1) $a_1=5$，$a_n=95$，$n=10$；

(2) $a_1=10$，$d=-2$，$n=20$；

(3) $a_1=14.5$，$d=0.5$，$a_n=32$.

3. 根据下列条件，求相应的等差数列$\{a_n\}$的有关未知数：

（1）$a_1=1$，$a_n=19$，$S_n=100$，求d与n；

（2）$d=-2$，$n=8$，$S_n=0$，求a_1与a_n；

（3）$a_1=1$，$d=4$，$S_n=45$，求n与a_n；

（4）$d=2$，$n=15$，$a_n=-10$，求a_1与S_n.

4. 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和公式是$S_n=5n^2+3n$，求它的前3项，并求它的通项公式．

5. （1）求正整数数列中前n个数的和S_n；

（2）求正整数数列中前n个偶数的和S_n；

（3）求正整数数列中前n个奇数的和S_n.

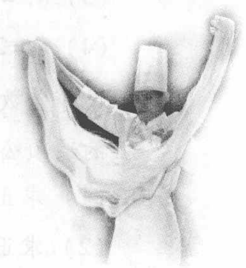
*6. （1）已知等差数列$a_n=5n-2$，则$a_5+a_8=$________，$a_3+a_{10}=$________，$a_4+a_9=$________；

（2）已知等差数列$a_n=6n+3$，则$a_1+a_2+a_3=$________，$a_4+a_5+a_6=$________，$a_7+a_8+a_9=$________.

6.3 等比数列

引例

（1）大家可能都吃过拉面．你观察过我们吃的拉面是怎样拉成的吗？拉面馆的厨师将一根很粗的面条拉伸、捏合、再拉伸、再捏合，如此反复，就拉成了许多根细面条．



想一想：这样捏合、拉伸7次后可拉出多少根面条？

第1次是1根，此后捏合、拉伸将1根变为2根，于是：

第1次捏合、拉伸成$2\times1=2$根；

第2次捏合、拉伸成$2\times2=2^2=4$根；

……

第7次捏合、拉伸成$2\times2^6=2^7=128$根．

经过7次捏合、拉伸成的面条根数构成一个数列：

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128. \qquad ①$$

（2）中国古代著名学者庄子曾提出“一尺之棰，日取其半，万世不竭”．用现代语言叙述应是：一尺长的木棒，每日取其一半，永远取不完．这样，每日剩下的部分都是前一日的一半．如果把“一尺之棰”看做单位“1”，那么就可以得到一个数列：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots. \qquad ②$$

1. 等比数列的定义与通项公式

从引例中我们可以看出：从第2项起数列①中的每一项与它的前一项的比都等于2；数列②中的每一项与它的前一项的比都等于$\frac{1}{2}$.

因此，上述数列都具有这样共同的特征：从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数．

一般地，如果一个数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

从第2项起，每一项与它前一项的比都等于同一个非零常数q，即

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\ \ (n\in \mathbf{N}_+)$$

那么，这个数列叫做**等比数列**，常数q叫做等比数列的**公比**．

引例中的两个数列都是等比数列，它们的公比分别是2和$\frac{1}{2}$.

想一想

如果等比数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n 的公比是 q，那么等比数列 a_n，a_{n-1}，…，a_2，a_1 的公比是多少？

如果一个数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

是等比数列，它的公比是 q，那么

$$a_2 = a_1q,$$
$$a_3 = a_2q = (a_1q)q = a_1q^2,$$
$$a_4 = a_3q = (a_1q^2)q = a_1q^3,$$
$$a_5 = a_4q = (a_1q^3)q = a_1q^4,$$
$$\cdots.$$

由此可知，首项为 a_1，公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可以表示为

$$a_n = a_1q^{n-1}$$

练一练

如果一个等比数列 $\{a_n\}$ 的首项是2，公比是 -3，那么它的通项公式是什么？

等比数列的通项公式给出了等比数列中 a_1，a_n，q 和 n 之间的关系．如果知道其中的三个量，就可以求出另一个量．

例1 指出下列数列中的等比数列，并求出公比和通项公式：

（1）1，-1，1，-1，…；　　（2）$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{12}$，…；

（3）3，3，3，3，…；　　（4）$-\frac{1}{2}$，1，-2，4，….

分析： 以上数列如果是等比数列就必须满足等比数列的定义，即从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个非零常数，经检验知，数列（1），（3），（4）是等比数列．

解： 由等比数列的定义可以判定（1），（3），（4）是等比数列．

数列（1）中的公比 $q=-1$，通项公式是 $a_n=(-1)^{n-1}$；

数列（3）中的公比 $q=1$，通项公式是 $a_n=3$；

数列（4）中的公比 $q=-2$，通项公式是 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2)^{n-1}=(-2)^{n-2}$.

例2 已知等比数列的首项是 -5，公比是 -2，求它的第 6 项．

解： $\because a_1=-5$，$q=-2$，$n=6$，

$\therefore a_6=a_1q^{6-1}=(-5)\times(-2)^5=160$.

例3 根据下列条件，分别求出等比数列的公比 q：

（1）$a_1=-2$，$a_5=-32$；

（2）$a_1=-2$，$a_6=64$.

分析： 本题是已知 a_1，n，a_n，求公比 q.

解：（1）$\because a_1=-2$，$a_5=-32$，

$\therefore$ $(-2)\cdot q^{5-1}=-32$，即 $q^4=16$.

$\therefore$ $q=\pm 2$.

（2）$\because a_1=-2$，$a_6=64$，

$\therefore$ $(-2)\cdot q^{6-1}=64$，即 $q^5=-32$．

$\therefore$ $q=-2$.

工具箱

在实数范围内，对于根式 $\sqrt[n]{a^n}$，有

当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 n 为偶数时，

$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, & (a\geqslant 0);\\ -a, & (a<0).\end{cases}$

练一练

在等比数列中，根据下列条件，求公比 q：

（1）$a_5=2$，$a_7=8$；　　（2）$a_{10}=-1$，$a_{25}=1$.

例4 一个等比数列的第 3 项是 45，第 4 项是 -135，求它的首项．

分析： 因为等比数列的 a_3，a_4 是已知的，所以可以通过 $\frac{a_4}{a_3}$ 求出公比 q，再利用通项公式求出首项．本题还可以根据两个独立的已知条件，利用列方程组的方法来求解．

解法 1： $\because a_3=45$，$a_4=-135$，

$\therefore$ 公比 $q=\frac{a_4}{a_3}=-3$.

$\because a_3=a_1q^{3-1}$，即 $45=a_1(-3)^2$，

$\therefore a_1=5$.

解法 2：

根据题意，有$\begin{cases}a_1q^2=45, & ①\\ a_1q^3=-135 & ②\end{cases}$

②÷①，得公比 $q=-3$.

将 $q=-3$ 代入①，得 $a_1(-3)^2=45$，

$\therefore a_1=5$.

例5 在 2 与 8 之间插入一个数 G，使 2，G，8 成等比数列．

分析：根据等比数列的定义，从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个非零常数，列出方程可求得 G.

解：$\because$ 2，G，8 成等比数列，

$\therefore \dfrac{G}{2}=\dfrac{8}{G}$，即 $G^2=2\times8=16$，

$\therefore G=\pm4$.

一般地，如果在 a 与 b 之间插入一个数 G，使 a，G，b 成等比数列，那么 G 叫做 a 与 b 的**等比中项**．

在例 5 中，数 ±4 叫做 2 与 8 的等比中项．

如果 G 是 a 与 b 的等比中项，那么$\dfrac{G}{a}=\dfrac{b}{G}$，即 $G^2=ab$. 所以

$$G=\pm\sqrt{ab}\ (ab>0)$$

容易看出，在一个等比数列中，从第 2 项起，每一项（有穷等比数列的末项除外）都是它的前一项与后一项的等比中项．

想一想

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) a_3 是不是 a_1 与 a_5 的等比中项？

(2) a_4 可以看做是哪两项的等比中项？

练习

1. 填空题：

(1) 已知等比数列 4，-12，36，…，则 $a_n=$________；

(2) 已知等比数列$\dfrac{1}{2}$，2，8，…，则 $a_5=$________；

(3) 在等比数列$\sqrt{2}$，2，$2\sqrt{2}$，…中，16 是第________项.

2. 求下列各组数的等比中项：

(1) -80 和 -45； (2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

2. 等比数列的前 n 项和

现在我们回到本章回顾与思考中提到的问题：如何求数列 1，2，2^2，2^3，…，2^{63}的和. 这实际上是求以首项为 1、公比为 2 的等比数列的前 64 项的和，即

$$S_{64}=1+2+4+8+\cdots+2^{62}+2^{63}. \qquad ①$$

如果用公比 2 乘以上面等式两边，得到

$$2S_{64}=2+4+8+16+\cdots+2^{63}+2^{64}. \qquad ②$$

为便于对①、②进行比较，我们将它们列在一起：

$$S_{64}=1+2+4+8+\cdots+2^{62}+2^{63},$$

$$2S_{64}=2+4+8+16+\cdots+2^{63}+2^{64}.$$

我们发现，两式上下相对的项完全相同，因此如果用②的两边分别减去①的两边，可以消去这些项，得到

$$S_{64}=2^{64}-1.$$

实际上，$2^{64}-1$ 这个数很大，超过了 1.84×10^{19}. 假定每千粒麦子的质量为 40g，那么这些麦粒的总质量超过了 7000 亿吨. 因此，如果国王明白这一情况，在当时的生产条件下他是不可能同意国际象棋发明者的要求的.

上述求解过程，启发了我们如何求等比数列前 n 项的和.

一般地，设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等比数列$\{a_n\}$的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1}. \qquad ③$$

将③的两边乘以公比 q，得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n. \qquad ④$$

用③的两边分别减去④的两边，得

$$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n.$$

由此得到，当 $q\neq1$ 时，等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\quad(q\neq 1)$$

学习小贴示

这种推导等比数列前 n 项和公式的方法叫做“错位相减法”.

因为 $a_1q^n=(a_1q^{n-1})q=a_nq$，所以 S_n 还可以用 a_1，q，a_n 表示成

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}\quad(q\neq 1)$$

想一想 当 $q=1$ 时，$S_n=$________.

上面两个求和公式给出了等比数列中 a_1，a_n，q，n，S_n 之间的关系，并且知道其中的三个量就可以通过前 n 项和公式及通项公式求出另外两个量.

例6 求等比数列$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…的前 8 项和.

解： $\because a_1=\frac{1}{2}$，$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$，$n=8$，

$$\therefore S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{256}.$$

试一试

如图 6－6 所示，把边长为 1 的正方形二等分，再把其中的一半二等分，依此进行下去. 你能算出 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ 的结果吗？

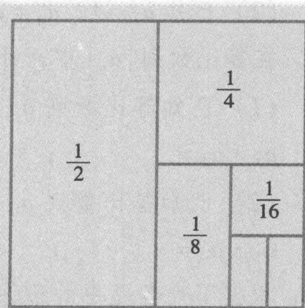


图 6－6

例7 已知等比数列前 5 项的和是 242，公比是 3，求它的首项.

解： $\because S_5=242$，$q=3$，$n=5$，

由 $S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{a_1(1-3^5)}{1-3}=242$，得

$a_1=2.$

即这个数列的首项是2.

练 习

1. 根据下列等比数列$\{a_n\}$的条件填空：

（1）$a_1=-6$，$q=-2$，则$S_6=$________；

（2）$a_1=4.8$，$q=1$，则$S_5=$________；

（3）$a_1=8$，$q=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{1}{2}$，则$S_n=$________.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中，已知三个量，将未知的量填入空格中：

题次＼量	a_1	q	n	a_n	S_n
（1）		$-\frac{1}{2}$	7	7	
（2）	1.5		4	96	
（3）	-27	$-\frac{1}{3}$			-20

习题 三

1. 在等比数列$\{a_n\}$中，

（1）已知$a_2=3$，$a_3=9$，求a_1和q；

（2）已知$a_1=1$，$a_n=256$，$q=2$，求n.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中，计算：

（1）已知等比数列$a_n=2^{n-1}$，则$a_1\cdot a_6=$________，$a_2\cdot a_5=$________，$a_3\cdot a_4=$________；

（2）已知等比数列$a_n=3^{n-2}$，则$a_1\cdot a_2=$________，$a_3\cdot a_4=$________，$a_5\cdot a_6=$________.

3. 根据下列各题中的条件，求相应等比数列$\{a_n\}$的前n项和S_n：

（1）$a_1=3$，$q=2$，$n=6$；

（2）$a_1=1$，$q=2$，$a_n=1024$.

4. 已知等比数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=3\cdot 2^{n-1}$，求它的前n项和公式.

6.4 数列实际应用举例

在生活实践中，有很多实际问题都可以转化为数列问题，然后用数列的知识求解.

学习小贴示

单利指仅在本金上计算利息，对本金所产生的利息不再计算利息.

复利是把上期末的本利和作为下一期的本金，在计算时每一期的本金是不同的.

本利和是指本金与利息之和.

例1 银行有一种储蓄业务叫做零存整取，即每月定时存入一笔相同数目的现金，到约定日期可以取出全部本利和. 规定每次存入的钱不计复利. 若某人每月初存入 100 元，月利率为 0.3%，问到第 12 个月末整取时本利和是多少?

分析： 本利 = 本金 + 利息. 第 1 个月存入的 100 元，计利 12 个月，到期本利是 $(100+100\times0.3\%\times12)$ 元，第 2 个月存入的 100 元，计利 11 个月，到期本利是 $(100+100\times0.3\%\times11)$ 元，…，第 12 个月存入的 100 元，计利 1 个月，到期本利是 $(100+100\times0.3\%\times1)$ 元. 由此可知，每个月存入的 100 元钱的到期本利构成一个等差数列，其和就是所要求的 12 个月的本利总款数.

每个月存入的 100 元钱到期的利息以及本利和如下表所示：

时间	到期的利息	到期的本利和
第 1 月	$100\times0.3\%\times12$	$100+100\times0.3\%\times12$
第 2 月	$100\times0.3\%\times11$	$100+100\times0.3\%\times11$
⋮	⋮	⋮
第 12 月	$100\times0.3\%\times1$	$100+100\times0.3\%\times1$

解： 由题意知，每个月存入的 100 元钱的到期本利构成一个等差数列，设为 $\{a_n\}$，则 $a_1=100+100\times0.3\%\times12=103.60$，$a_{12}=100+100\times0.3\%\times1=100.30$，$n=12$，

$$\therefore S_{12}=\frac{n(a_1+a_{12})}{2}=\frac{12\times(103.60+100.30)}{2}=1223.40\ (\text{元}).$$

答： 12 个月的本利和是 1223.40 元.

例2 某市出租车的计价标准为 1.2 元/km，起步价为 10 元，即最初的 4km（不含 4km）计费 10 元. 如果某人乘坐该市的出租车去往 14km 处的目的地，且一路畅通，等候时间为 0，需要支付多少车费?

分析： 根据题意，我们知道，当行程达到 4km 时，车费为 10 + 1.2 = 11.2 元，行程达到 5km 时，车费为 11.2 + 1.2 = 12.4 元，…. 显然，当行

程大于等于 4km 时，每公里所付的车费构成一个公差为 1.2 的等差数列，本题就是求此等差数列的第 11 项.

解：由题意知，当该出租车的行程大于或等于 4km 时，每增加 1km，乘客需支付 1.2 元，所以我们可以建立一个等差数列 $\{a_n\}$ 的模型来计算车费.

令 $a_1=11.2$，表示 4km 处的车费，公差 $d=1.2$，那么当车行至 14km 处时，$n=11$，此时需支付的车费

$a_{11}=11.2+(11-1)\times1.2=23.2$(元).

答：需要支付车费 23.2 元.

例3 某林场今年计划造林 10 公顷，以后每年比上一年多造林 10%，那么从今年起，几年内可以使林场造林达到 60 公顷?（结果保留到个位）

分析：今年计划造林 10 公顷，第二年计划造林 $10+10\times10\%=10(1+10\%)$ 公顷，第三年计划造林 $10(1+10\%)+10(1+10\%)\times10\%=10(1+10\%)^2$ 公顷，…；由此可知，每年计划造林的公顷数构成一个等比数列.

解：由题意知，每年计划造林的公顷数构成一个等比数列，设为 $\{a_n\}$，则 $a_1=10$，$q=1+10\%=1.1$，$S_n=60$.

$$\therefore \quad \frac{10(1-1.1^n)}{1-1.1}=60.$$

整理得 $1.1^n=1.6$,

两边取对数，得 $n\lg1.1=\lg1.6$,

利用计算器计算，得

$$n=\frac{\lg1.6}{\lg1.1}=\frac{0.2041}{0.0414}\approx5.$$

答：5 年内可以使林场造林达到 60 公顷.

> **学习小贴示**
>
> km^2 表示公顷，$1km^2=10000m^2$.

练 习

1. 某长跑运动员 7 天里每天的训练量（单位：m）是：

7500	8000	8500	9000	9500	10000	10500

这位长跑运动员 7 天共跑了多少米?

2. 银行给予养鸡场无息贷款36000元，还款方式是一年后的第一个月还1000元，以后每月比前一个月多还200元，请问需要多少个月才能还清全部贷款？

3. 某工厂2008年年产值为100万元，计划到2018年年产值要达到200万元（即翻一番），求年平均增长率．

习题 四

1. 在通常情况下，从地面到10km高空，高度每增加1km，气温就下降某一个固定值，如果1km高度的气温是8.5℃，5km高度的气温是−17.5℃，求2km，4km，8km高度的气温．

2. 某地为了保护水土资源，实行退耕还林，如果2008年退耕8万公顷，以后每年增加10%，那么2011年需退耕多少万公顷？（结果保留到个位）

3. 某城市规划治理环境大气污染，减少“三废”排放，提高空气质量．今年空气质量为“良”的天数共为105天，力争2年后使空气质量为“良”的天数达到240天．这个城市空气质量为“良”的天数的年平均增长率是多少？（精确到0.01）

4. 某工厂去年的产值为138万元，计划在今后5年内每年比上一年产值增长10%，这5年的总产值是多少？（精确到万元）

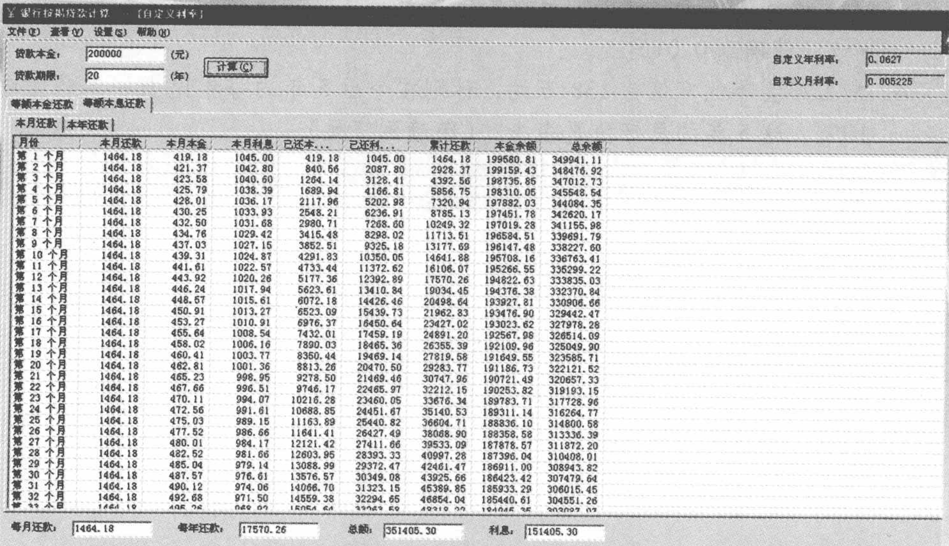
数学实验

等额本息还贷模型

某市职员小刘想从银行贷款20万元购买商品房，贷款期限20年．若采用等额本息还款方式，那么每月应还款多少？

小刘网上查询目前该市个人住房商业贷款利率表得到，贷款期20年，其月利率是0.5225%，调用《银行按揭贷款计算》软件，将数据输入文本框（图6－7），然后点击按钮［计算］，立即呈现结果：每月偿还金额为1464.18元，还款总额为351405.30元．

如果你的父母想贷款25万元购买一套商品房，贷款期限是15年，请上网下载这个软件利用软件帮助测算一下，你家还款有无压力？



文件(F) 查看(V) 设置(S) 帮助(H)

贷款本金：200000 (元)

贷款期限：20 (年)

计算(C)

自定义年利率：0.0627

自定义月利率：0.005225

等额本金还款 等额本息还款

本月还款 本年还款

月份	本月还款	本月本金	本月利息	已还本...	已还利...	累计还款	本金余额	总余额
第 1 个月	1464.18	419.18	1045.00	419.18	1045.00	1464.18	199580.81	349941.11
第 2 个月	1464.18	421.37	1042.80	840.56	2087.80	2928.37	199159.43	348476.92
第 3 个月	1464.18	423.58	1040.60	1264.14	3128.41	4392.56	198735.85	347012.73
第 4 个月	1464.18	425.79	1038.39	1689.94	4166.81	5856.75	198310.05	345548.54
第 5 个月	1464.18	428.01	1036.17	2117.96	5202.98	7320.94	197882.03	344084.35
第 6 个月	1464.18	430.25	1033.93	2548.21	6236.91	8785.13	197451.78	342620.17
第 7 个月	1464.18	432.50	1031.68	2980.71	7268.60	10249.32	197019.28	341155.98
第 8 个月	1464.18	434.76	1029.42	3415.48	8298.02	11713.51	196584.51	339691.79
第 9 个月	1464.18	437.03	1027.15	3852.51	9325.18	13177.69	196147.48	338227.60
第 10 个月	1464.18	439.31	1024.87	4291.83	10350.05	14641.88	195708.16	336763.41
第 11 个月	1464.18	441.61	1022.57	4733.44	11372.62	16106.07	195266.55	335299.22
第 12 个月	1464.18	443.92	1020.26	5177.36	12392.89	17570.26	194822.63	333835.03
第 13 个月	1464.18	446.24	1017.94	5623.61	13410.84	19034.45	194376.38	332370.84
第 14 个月	1464.18	448.57	1015.61	6072.18	14426.46	20498.64	193927.81	330906.66
第 15 个月	1464.18	450.91	1013.27	6523.09	15439.73	21962.83	193476.90	329442.47
第 16 个月	1464.18	453.27	1010.91	6976.37	16450.64	23427.02	193023.62	327978.28
第 17 个月	1464.18	455.64	1008.54	7432.01	17459.19	24891.20	192567.98	326514.09
第 18 个月	1464.18	458.02	1006.16	7890.03	18465.36	26355.39	192109.96	325049.90
第 19 个月	1464.18	460.41	1003.77	8350.44	19469.14	27819.58	191649.55	323585.71
第 20 个月	1464.18	462.81	1001.36	8813.26	20470.50	29283.77	191186.73	322121.52
第 21 个月	1464.18	465.23	998.95	9278.50	21469.46	30747.96	190721.49	320657.33
第 22 个月	1464.18	467.66	996.51	9746.17	22465.97	32212.15	190253.82	319193.15
第 23 个月	1464.18	470.11	994.07	10216.28	23460.05	33676.34	189783.71	317728.96
第 24 个月	1464.18	472.56	991.61	10688.85	24451.67	35140.53	189311.14	316264.77
第 25 个月	1464.18	475.03	989.15	11163.89	25440.82	36604.71	188836.10	314800.58
第 26 个月	1464.18	477.52	986.66	11641.41	26427.49	38068.90	188358.58	313336.39
第 27 个月	1464.18	480.01	984.17	12121.42	27411.66	39533.09	187878.57	311872.20
第 28 个月	1464.18	482.52	981.66	12603.95	28393.33	40997.28	187396.04	310408.01
第 29 个月	1464.18	485.04	979.14	13088.99	29372.47	42461.47	186911.00	308943.82
第 30 个月	1464.18	487.57	976.61	13576.57	30349.08	43925.66	186423.42	307479.64
第 31 个月	1464.18	490.12	974.06	14066.70	31323.15	45389.85	185933.29	306015.45
第 32 个月	1464.18	492.68	971.50	14559.38	32294.65	46854.04	185440.61	304551.26

每月还款：1464.18 每年还款：17570.26 总额：351405.30 利息：151405.30

图6－7

那么软件是根据什么样的数学模型进行计算的呢？下面我们来讨论这个问题：

例如，某人向银行贷款P万元购买大宗商品，贷款期限为n个月，月利率为r. 贷款偿还采用等额本息的还款方式，即从第一个月起，每月还给银行的款数均相同，到第n个月还清贷款的本金及利息之和（简称本利和）．那么每月应还款多少元？还款的本利和是多少？

根据我国银行业的规定，贷款一般都按照复利计算．若贷款P万元，月利率为r，经过一个月后，应偿还的本利和是

$$a_1=P(1+r),$$

经过2个月后，应偿还的本利和为

$$a_2=a_1+a_1r=a_1(1+r)=P(1+r)^2,$$

……

经 n 个月后，应偿还的本利和为

$$a_n=P(1+r)^n.$$

下面求贷款后的第1个月开始，每月末都偿还 y 万元，直至第 n 月末，每一笔偿还款数的本利和 b_n，以及它们的累计值 S_n：

第1个月末偿还 y 万元的本利和为 $b_1=y(1+r)^{n-1}$（相当于将 y 存入银行，因此，后 $n-1$ 个月享有贷款利息），

第2个月末偿还 y 万元的本利和为 $b_2=y(1+r)^{n-2}$（后 $n-2$ 个月享有贷款利息），

……

第 $n-1$ 个月末偿还 y 万元的本利和为 $b_{n-1}=y\ (1+r)$（后1个月享有贷款利息），

第 n 个月末偿还 y 万元的本利和为 $b_n=y$（无利息）.

由于 b_n，b_{n-1}，…，b_1 是公比为（$1+r$）的等比数列，它们的和，由等比数列求和公式得：

$$S_n=y+y(1+r)+\cdots+y(1+r)^{n-2}+y(1+r)^{n-1}=y\frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)}.$$

显然，应偿还的本利和等于累计的还款数，$a_n=S_n$，即

$$P(1+r)^n=y\frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)}.$$

于是 $y=\dfrac{rP(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$（万元）.

例如，$P=20$ 万元，月利率 $r=0.5225\%$，20年还清，共240个月，那么，每个月应偿还的款数为

$$y=\frac{0.005225\times20\times(1.005225)^{240}}{(1.005225)^{240}-1}\approx0.146419\text{（万元）}$$

240个月的偿还的总额

$$S_{240}=240\times1464.19=351405.3\text{ 元}.$$

归纳与总结

1. 知识要点

（1）_______________叫做数列，________叫做这个数列的项.

（2）通常把________叫做数列的通项，并把数列简记为________.

（3）_______________叫做这个数列的通项公式.

（4）等差数列与等比数列：

数列	等差数列	等比数列
定义		
通项公式	$a_n=$________	$a_n=$________
中项公式	$A=$________	$G=$________
前 n 项和公式	①$S_n=$________， ②$S_n=$________.	①$S_n=$________ $(q\neq1)$， ②$S_n=$________ $(q\neq1)$， ③$S_n=$________ $(q=1)$.

2. 重点与难点

本单元学习的重点是数列的概念、等差数列与等比数列的通项公式与前 n 项和公式．难点是等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和公式的推导以及运用这些公式解决实际问题．

学习本单元的内容需要注意理解以下几方面的问题：

（1）按一定顺序排列的一列数叫做数列．

通常把数列的第 n 项 a_n 叫做数列的通项，并把数列简记为 $\{a_n\}$．

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与序号 n 之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的通项公式．

知道了一个数列的通项公式后，只要依次用正整数 1，2，3，…去代替公式中的 n，就可以求出这个数列的各项．因此，已知数列的通项公式，就等于知道了数列的每一项．

（2）一般地，如果一个数列

$$a_1，a_2，a_3，\cdots，a_n，\cdots$$

从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数 d，即

$$a_{n+1}-a_n=d\ (n\in\mathbf{N}_+)$$

那么，这个数列叫做等差数列，常数 d 叫做等差数列的公差．

①等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d$；该公式给出了等差数列中a_1，a_n，d和n之间的关系．知道其中的三个量，就可以求出另一个量．

②等差数列$\{a_n\}$的前n项和公式为$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$和$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$；这两个求和公式给出了等差数列的$a_1$，$a_n$，$d$，$n$，$S_n$之间的关系．并且知道其中的三个量就可以通过前$n$项和公式及通项公式求出另外两个量．

③一般地，如果在a与b之间插入一个数A，使a，A，b成等差数列，那么A叫做a与b的等差中项，即$A=\frac{a+b}{2}$.

（3）一般地，如果一个数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个非零常数q，即

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\ (n\in\mathbf{N}_+)$$

那么，这个数列叫做等比数列，常数q叫做等比数列的公比．

①等比数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$；该公式给出了等比数列中a_1，a_n，q和n之间的关系．知道其中的三个量，就可以求出另一个量．

②等比数列$\{a_n\}$的前n项和公式为$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$（$q\neq1$）和$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$（$q\neq1$）；这两个求和公式给出了等比数列的$a_1$，$a_n$，$q$，$n$，$S_n$之间的关系．并且知道其中的三个量就可以通过前$n$项和公式及通项公式求出另外两个量．还需要注意的是：当$q=1$时，前n项和公式为$S_n=na_1$.

③一般地，如果在a与b之间插入一个数G，使a，G，b成等比数列，那么G叫做a与b的等比中项，即$G=\pm\sqrt{ab}$（$ab>0$）．

例1 在-1与7之间插入三个数，使它们与这两个数成等差数列，求这三个数．

分析：此题可以按两种方法来求解．第一种方法是把-1看成a_1，7看成a_5，插入的三个数分别是a_2，a_3，a_4，用等差数列的通项公式可以求得这三个数．第二种方法是利用求等差中项的方法．

解法1：设插入的三个数为x，y，z，则-1，x，y，z，7成等差数列．显然，$a_1=-1$，$a_5=7$. $\therefore a_5=-1+4d$（d是公差），

$\therefore d=\frac{7+1}{4}=2$，

$\therefore x=-1+2=1$，$y=1+2=3$，$z=3+2=5$，

$\therefore$ 所求的三个数为1，3，5.

解法2：设插入的三个数为x，y，z，则-1，x，y，z，7成等差数列．显然y是-1与7的等差中项，所以

$$y=\frac{-1+7}{2}=3.$$

同样x是-1与3的等差中项，z是3与7的等差中项．

所以 $x=\frac{-1+3}{2}=1$，$z=\frac{3+7}{2}=5.$

$\therefore$ 所求的三个数为1，3，5.

例2 如果成等比数列的三个数的和为7，乘积为8，求这三个数．

分析：如果已知三个数成等比数列，并且知道它们的积，通常设这三个数为$\frac{a}{q}$，a，aq，其中q是公比，这样可以使运算简化，这是一个重要的方法．

解：设这三个数为$\frac{a}{q}$，a，aq.

$\because \frac{a}{q}\times a\times aq=8$，即 $a^3=8$，

$\therefore a=2.$

即所求的三个数为$\frac{2}{q}$，2，$2q$.

又 $\because \frac{2}{q}+2+2q=7$，即 $2q^2-5q+2=0$，

$\therefore q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}.$

因此，所求的三个数为1，2，4或4，2，1.

综合练习 六

A 组

1. 选择题：

(1) 数列 $\{\lg 2^n\}$ (　　)；

A. 是等差数列且是等比数列　B. 是等差数列但不是等比数列

C. 是等比数列但不是等差数列　D. 不是等差数列也不是等比数列

(2) 等差数列的通项公式是 $a_n=3n-2$，则前 20 项的和 $S_{20}=$(　　)；

A. 390　B. 590　C. 780　D. 295

(3) 已知$\sqrt{3}$，$a-1$，$3\sqrt{3}$成等比数列，则 $a=$(　　)；

A. 3　B. 3 或 -3　C. 4 或 -2　D. -3

(4) 等比数列 1，$\sqrt{2}$，2，…中的第(　　)项是 $8\sqrt{2}$；

A. 6　B. 7　C. 8　D. 9

(5) 已知等比数列$\frac{5}{2}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{5}{8}$，…，则其前 10 项的和 $S_{10}=$(　　).

A. $\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$　B. $5\left(1-\frac{1}{2^{11}}\right)$　C. $5\left(1-\frac{1}{2^{9}}\right)$　D. $5\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$

2. 填空题：

(1) 数列$\{a_n\}$是等比数列，$a_1=1$，$q=3$，则 $a_5=$ ________；

(2) a_1，a_2，a_3，a_4成等差数列，$a_1+a_4=\frac{5}{2}$，则 $S_4=$ ________；

(3) $5+3\sqrt{2}$与 x 的等比中项有一个是$\sqrt{7}$，则 $x=$ ________；

(4) 一个数列的通项公式是 $a_n=n(n-1)$，则 $a_{11}=$ ________，$a_{20}=$ ________，56 是这个数列的第________项.

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知下列条件，求首项 a_1 和公差 d：

(1) $a_6=5$，$a_3+a_8=5$；

(2) 前 n 项和公式是 $S_n=4n^2-3n$；

(3) 第 5 项等于 10，前 3 项的和等于 3.

4. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_6=2$，$a_9=16$，求 a_{15}和 S_5.

5. 三个数成等差数列，它们的和等于 15，如果把这三个数依次加上 1，3，9，则成等比数列，求这三个数.

B 组

1. 选择题：

(1) 在等差数列$\{a_n\}$中，已知$S_{12}=72$，则$a_1+a_{12}=(\quad)$；

A. 12　　B. 10　　C. 8　　D. 6

(2) 设等差数列的前n项和公式是$S_n=5n^2+3n$，则它的通项$a_n=(\quad)$；

A. $10n-8$　　B. $10n-6$　　C. $10n-4$　　D. $10n-2$

(3) 数列$\{a_n\}$中，如果$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ $(n\geqslant1)$，且$a_1=2$，则$S_5=(\quad)$；

A. $\frac{31}{8}$　　B. $-\frac{31}{8}$　　C. $\frac{31}{32}$　　D. $-\frac{31}{32}$

(4) 一个等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_n=a_{n+1}+a_{n+2}$，则公比$q=(\quad)$；

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(5) 已知a，c是符号相同的非零实数，则$b^2=ac$是a，b，c成等比数列的$(\quad)$；

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

(6) 两个数的等差中项是20，等比中项是12，则这两个数为$(\quad)$.

A. 18，22　　B. 9，16　　C. 4，36　　D. 16，24

2. 填空题：

(1) 在等差数列$\{a_n\}$中，$S_7=63$，则$a_4=$________；

(2) 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_n=32+n$，则$S_{10}=$________；

(3) 已知$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=255$，则$n=$________.

3. (1) 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=9$，$a_9=-6$，$S_n=63$，求n.

(2) 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_3-a_1=8$，$a_6-a_4=216$，且$S_n=40$，求q，a_1，n.

4. 求数列$1+\frac{1}{2}$，$3+\frac{1}{4}$，$5+\frac{1}{8}$，$7+\frac{1}{16}$，…的前n项和.

5. 有四个数，其中前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，并且第一个数与第四个数的和是16，第二个数与第三个数的和是12，求这四个数.

第七单元　平面向量

回顾与思考

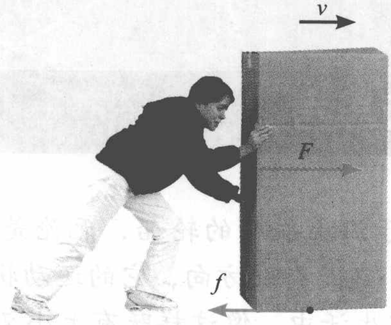
对于海上航行的轮船，无论是改变其行驶速度的大小还是行驶方向，它的运动状态都会发生变化. 现实生活中，像这样既有大小又有方向的量有很多. 我们用数学方法抽象地概括并研究这些量，就产生了向量的概念. 向量是数学学习中的重要概念之一，它和实数一样也能进行运算. 今天，向量已被广泛应用于几何学、物理学、经济学、机电工程、航天航空工程等众多领域.

本单元将介绍向量的基本知识，学习向量的概念和各种表示方法，向量的运算及应用.

7.1 平面向量的概念

引例

在中学物理学习中，我们学习过简单的受力分析，比如，人用力推一个物体，分析物体受力情况，我们知道，物体在水平方向上受到推力 F 及地面给它摩擦力 f，这两个力不但有数值大小而且还有方向．



在现实生活中，存在两种类型的量，一种量只有数值大小没有方向，它们可以用实数表示，如质量是 5 克，时间是 10 秒，面积是 4cm^2 等．而另一种量如力，位移，速度等，它们不仅有数值的大小，而且还具有方向的意义．

为了区别这两种量，我们把只有数值大小的量叫做**数量**（或**标量**），把既有数值大小又有方向的量叫做**向量**（或**矢量**）．

这里所说的向量，是对众多具体的既具有数值大小又具有方向的量的抽象概括，它原来具有什么实际意义，已经不重要了．在数学研究中，我们关注的是这样一类量所具有的共同特征——数值大小与方向．

表示向量的最形象、直观的方法是借用标有箭头的线段．如图 7－1，线段 AB，并画有箭头指向 B. 我们把点 A 叫做**起点**，点 B 叫做**终点**．这种规定了起点和终点的线段叫做**有向线段**．

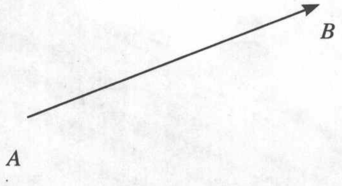


图 7－1

以 A 为起点，B 为终点的有向线段，记做 $\overrightarrow{AB}$（字母要按照起点在前，终点在后的顺序写）．这样 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BA}$ 就表示两条不同的有向线段．

用有向线段表示向量的方法叫做向量的几何表示，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．这时，我们把有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 叫做向量 $\overrightarrow{AB}$.

向量有时也用一个标有箭头的小写字母表示，如 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{f}$，$\vec{v}$ 等．

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度，叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 的**模**，记做 $|\overrightarrow{AB}|$．类似的，向量 $\vec{a}$ 的模记做 $|\vec{a}|$．向量的模是一个数量，是非负数．

两个向量如果模相等，方向也相同，那么我们说这两个**向量相等**．向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相等，记做 $\vec{a}=\vec{b}$，如图 7－2（1）．不难看出，向量只含有两个要素——大小和方向，而与它的起点位置无关．

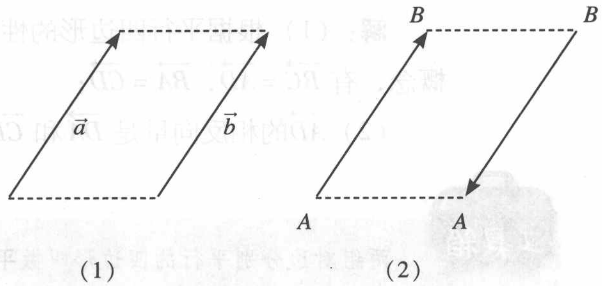


图 7－2

两个向量如果模相等，方向相反，那么我们说这两个向量互为**相反向量**，$\vec{a}$ 的相反向量记做 $-\vec{a}$. 如图 7－2（2），因为 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|$，且 $\overrightarrow{AB}$ 的方向与 $\overrightarrow{BA}$ 的方向相反，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为相反向量，因此 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

工具箱

一组对边平行且不等的四边形叫做**梯形**，梯形的另两条边叫做腰．

两腰相等的梯形叫做**等腰梯形**.

想一想

如图 7－3，在等腰梯形 $ABCD$ 中，两个向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 互为相反向量吗？向量 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 相等吗？

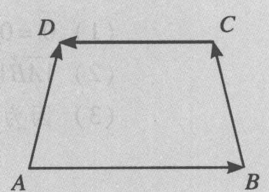


图 7－3

当向量的终点与起点重合时，向量便成为一个点，我们称它为**零向量**，记做 $\vec{0}$，零向量的模等于 0，即 $|\vec{0}|=0$. 零向量的方向是任意的（即不确定）．我们规定：所有的零向量都相等．

长度为 1 的向量叫做**单位向量**．即如果 $\vec{a_0}$ 是单位向量，则 $|\vec{a_0}|=1$.

两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同或相反，我们就说这两个向量互相平

行，记做 $\vec{a}/\!/\vec{b}$. 由于向量由大小和方向两个因素确定，与起点的位置无关，因此平行向量又叫做**共线向量**.

例 如图 7－4，在平行四边形 $ABCD$ 中，分别写出：

（1）与向量 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{CD}$ 相等的向量；

（2）向量 $\overrightarrow{AD}$ 的相反向量.

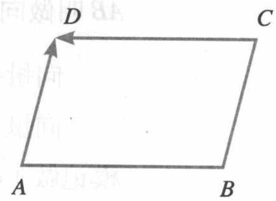


图 7－4

解：（1）根据平行四边形的性质及相等向量的概念，有 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$；

（2）$\overrightarrow{AD}$ 的相反向量是 $\overrightarrow{DA}$ 和 $\overrightarrow{CB}$.

工具箱 两组对边分别平行的四边形叫做**平行四边形**，其两组对边分别相等.

练习

1. 填空题：

（1）两个向量如果________________，那么我们说这两个向量相等；

（2）两个向量如果________________，那么我们说这两个向量互为相反向量.

2. 下列式子或说法错在哪里？

（1）$\vec{0}=0$；

（2）$|\overrightarrow{AB}|=-5$；

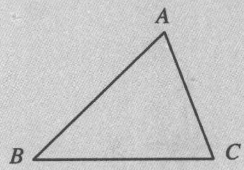
（3）因为 $\vec{a_0}$ 是单位向量，所以 $\vec{a_0}=1$.

习题 一

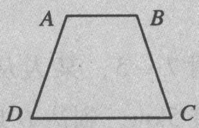
1. 已知$\triangle ABC$，

(1) 画出向量$\overrightarrow{BD}$，使$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$；

(2) 以D为起点画出向量$\vec{m}$，使$\vec{m}=-\overrightarrow{AB}$.



第1题



第2题

2. 已知四边形$ABCD$为等腰梯形，$AB\parallel DC$，$AD=BC$.

(1) 写出与向量$\overrightarrow{AB}$共线的向量；

(2) 确定向量$\overrightarrow{AD}$与向量$\overrightarrow{BC}$的关系.

7.2 平面向量的运算

1. 向量的加法

引例

如图 7－5，某人从 A 地向东行进 5km，到达 B 地，再从 B 地向北行进 5km，到达 C 地，这时从 A 地看，此人恰好在东北方向 $5\sqrt{2}$km 处.

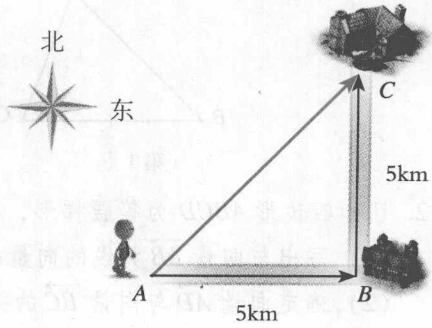


图 7－5

我们看到，某人连续做了两次位移 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BC}$，从而他由 A 地到达 C 地. 其效果与由 A 地向东北方向行进 $5\sqrt{2}$km（即 $\overrightarrow{AC}$）是一样的. 在物理学中我们称 $\overrightarrow{AC}$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的合成位移. 这里，我们把向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的和，即 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

由此，得到向量加法的一个法则：

如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为已知向量，在平面上任取一点 A，以 A 为起点，作向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，再以 B 为起点作 $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，令 $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，则 $\vec{c}$ 叫做 **$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和**. 记做 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

这个法则就是向量加法的**三角形法则**，如图 7－6.

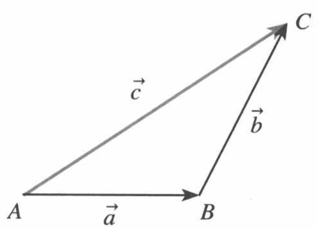


图 7－6

练一练　根据向量加法的三角形法则，画出下列各题中 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和：

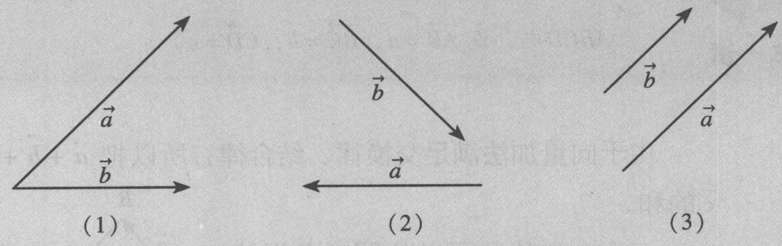


图 7－7

在上面根据向量加法的三角形法则的作图中，如果以 A 为起点，作向量 $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$（图 7－8），则由 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ 可知，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是这个平行四边形的两条邻边，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和 $\overrightarrow{AC}$ 恰好是平行四边形的一条对角线．这样就得到了向量加法的**平行四边形法则**．

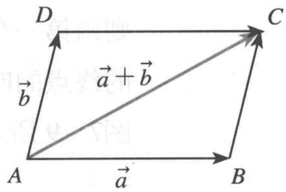


图 7－8

如果 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为非零向量，在平面上任取一点 A，以 A 为起点，以 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为邻边作平行四边形，则在这个平行四边形中，以 A 为起点的对角线所表示的向量，叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和．

从图 7－8 中，我们看到，

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\vec{a},\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b},$$

由三角形法则有

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

所以 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC},$

即

$$\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$$

这说明向量加法满足交换律．

向量加法也满足结合律，即

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

试一试

请同学们自己证明向量加法满足结合律．（提示：在任意四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{c}$）

由于向量加法满足交换律、结合律，所以把 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 叫做向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的和．

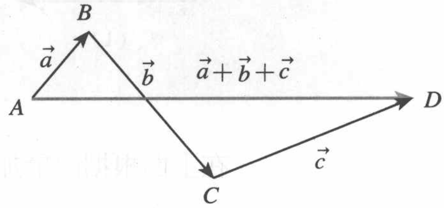


图 7－9

三个向量的和可以依照三角形法则得到：把三个向量首尾顺次连接，则由第一个向量的起点到第三个向量的终点的向量就是三个向量的和．如图7－9 所示，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

练 习

1. 不画图，直接写出各题结果：

（1）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$ ________；（2）$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}=$ ________；

（3）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=$ ________.

2. 计算下列各式：

（1）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$；（2）$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$；

（3）$(-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AB}$；（4）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

2. 向量的减法

向量减法是向量加法的逆运算．如果两个向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 的和等于 $\vec{a}$，即 $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$，那么，我们把 $\vec{c}$ 叫做 **$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差**，记做 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

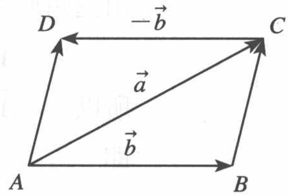


图 7－10

例1 验证：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$．

证明：如图 7－10，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，

则 $\qquad \overrightarrow{CD}=-\vec{b}$.

分别在三角形 ABC 和三角形 ACD 中，利用三角形法则，得

$$\vec{b}+\overrightarrow{BC}=\vec{a},$$

则 $\qquad \overrightarrow{BC}=\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

而　　$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$,

所以　　$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

由此得出：减去一个向量，等于加上这个向量的相反向量．这是向量减法的又一法则，依照它，可以把向量减法问题转化成加法问题．

根据向量加法的三角形法则，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差可以这样去求：在平面上任选一点 A，如图7－11，作向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则向量 $\overrightarrow{CB}$ 就是所求的差 $\vec{a}-\vec{b}$.

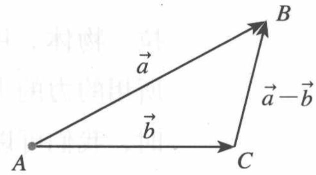


图 7－11

做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差，要注意三点：

（1）两个向量要以同一起点作出；

（2）两个向量的差是两个向量终点之间的向量；

（3）差向量的箭头指向被减的向量．

练一练

已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$（图 7－12），请分别画出 $\vec{a}-\vec{b}$ 和 $\vec{b}-\vec{a}$.

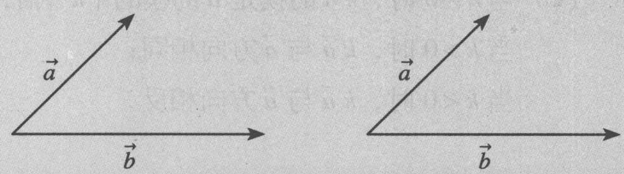


图 7－12

练 习

1. 计算下列各式：

（1）$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}$；　　（2）$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$；　　（3）$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}$；

（4）$\overrightarrow{AD}-\vec{0}$；　　（5）$\vec{0}-\overrightarrow{AB}$.

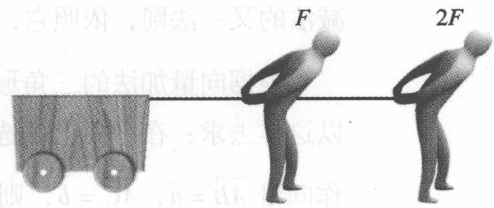
2. 菱形 $ABCD$ 的中心为 O，若 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. 试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$.

3. 利用图示验证：$-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$.

3. 数乘向量

引 例

甲、乙二人朝同一方向用力拉一物体．甲用力记做 $\vec{F}$，而乙所用的力的大小是甲的二倍，这时，我们可以把乙所用的力表示成 $2\vec{F}$.



很显然，这两个向量是共线的，而且大小之间存在倍数关系．因此，我们得到实数与向量的积的意义及运算法则．

一般地，实数 k 与向量 $\vec{a}$ 的积叫做**数乘向量**，记做 $k\vec{a}$. 它是这样确定的：

（1）当 $k=0$ 时，$k\vec{a}$ 为零向量，即 $k\vec{a}=\vec{0}$；

（2）当 $k\neq0$ 时，$k\vec{a}$ 的模是 $\vec{a}$ 的模的 $|k|$ 倍，即 $|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|$.

当 $k>0$ 时，$k\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同；

当 $k<0$ 时，$k\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相反．

想一想 如果 $\vec{a}$ 为零向量，k 是实数，则 $k\vec{a}=?$

例2 已知向量 $\vec{a}$，分别作出向量 $\frac{1}{2}\vec{a}$，$2\vec{a}$，$-3\vec{a}$.

解：如图 7－13，向量 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\frac{1}{2}\vec{a}$，向量 $\overrightarrow{CD}$ 表示 $2\vec{a}$，向量 $\overrightarrow{EF}$ 表示 $-3\vec{a}$.

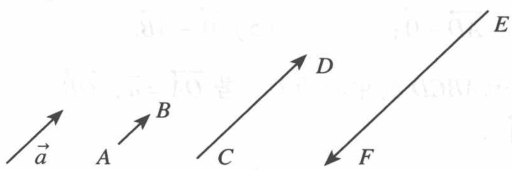


图 7－13

练一练

根据数乘向量的意义填空：

(1) $1\vec{a}=$________；　　(2) $(-1)\vec{a}=$________.

和实数之间相乘一样，实数与向量相乘，也满足结合律和分配律：

(1) $(m\cdot n)\vec{a}=m(n\vec{a})$；

(2) $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$；

(3) $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$.

例3 计算 $4\vec{a}+3(\vec{a}+2\vec{b})-2(3\vec{a}-4\vec{b})$.

解： 根据运算律，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=4\vec{a}+3\vec{a}+6\vec{b}-6\vec{a}+8\vec{b}\\&=(4+3-6)\vec{a}+(6+8)\vec{b}\\&=\vec{a}+14\vec{b}.\end{aligned}$$

向量的加法、减法以及数乘向量运算，统称为**向量的线性运算**．向量的线性运算的结果仍然是向量．

例4 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，如图 7－14，若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{DO}$.

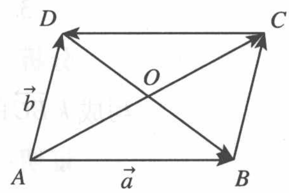


图 7－14

解： $\because$ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$，

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}$，

且 O 是 AC，DB 中点，

$\therefore$ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$，

$\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

工具箱

平行四边形的对角线互相平分．

练一练

计算：

(1) $-\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$；　　(2) $4(3\vec{a}-\vec{b})+3(\vec{b}-3\vec{a})$.

在向量的概念一节中，我们已经知道，如果两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同或相反，这两个向量就互相平行，记做 $\vec{a}/\!/\vec{b}$. 平行向量又叫做共线向量.

结合向量平行与数乘向量的含义，我们可以得到下述结论：

设 $\vec{a}$，$\vec{b}$为两个非零向量，如果存在实数 k，使得 $\vec{b}=k\vec{a}$，那么 $\vec{a}/\!/\vec{b}$；反之，如果 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，那么一定存在一个非零实数 k，使得 $\vec{b}=k\vec{a}$.

例5 已知：$\vec{a}_1=3\vec{c}_1$，$\vec{a}_2=2\vec{c}_1$，且 $\vec{c}_1\neq\vec{0}$，判断$\vec{a}_1$ 与 $\vec{a}_2$ 是否共线.

证明：$\because$ $\vec{a}_1=3\vec{c}_1$，$\vec{a}_2=2\vec{c}_1$，$\vec{c}_1\neq\vec{0}$，$3\vec{c}_1$ 与 $2\vec{c}_1$ 同向，

$\therefore$ $\vec{a}_1\neq\vec{0}$，$\vec{a}_2\neq\vec{0}$，且$\vec{a}_1$ 与 $\vec{a}_2$ 同向.

$\therefore$ $\vec{a}_1/\!/\vec{a}_2$.

***例6** 已知：如图 7－15，M，N 分别是 $\triangle ABC$ 的 AB 和 AC 边上的点，且 $|AM|=\frac{1}{3}|AB|$，$|AN|=\frac{1}{3}|AC|$，求证：$MN/\!/BC$.

分析：为了证明 $MN/\!/BC$，根据向量平行的定理，只要证明 $\overrightarrow{MN}$ 可以写成 $k\overrightarrow{BC}$ 的形式即可.

证明：由已知条件，得

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

$\therefore$ $\overrightarrow{MN}/\!/\overrightarrow{BC}$

即 $MN/\!/BC$.

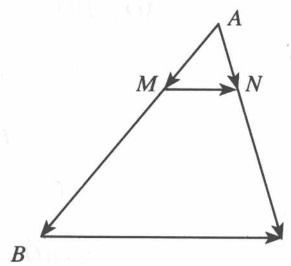


图 7－15

练习

1. 用长度为1的向量 $\vec{e}$ 表示下列向量：

(1) $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 的方向相同且长度为6；

(2) $\vec{b}$ 与 $\vec{e}$ 的方向相反且长度为8.

2. 计算：

(1) $3(\vec{a}-2\vec{b})+2(4\vec{b}-3\vec{a})$；

(2) $4(3\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})-12(-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b})$.

3. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 $60°$，且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，试画出下列向量：

(1) $\vec{a}-2\vec{b}$；　　(2) $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

***4.** 请用向量方法证明：若 MN 是 $\triangle ABC$ 的中位线，M 在 AB 边上，N 在 AC 边上，则 $MN/\!/BC$.

习题 二

1. k 为怎样的数值时，非零向量 $\vec{a}$ 和 $k\vec{a}$ 满足下列关系：

(1) 同方向；　　(2) 反方向；　　(3) 相等；

(4) $|k\vec{a}|<|\vec{a}|$；　　(5) $|k\vec{a}|>|\vec{a}|$；　　(6) $|k\vec{a}|=|\vec{a}|$.

2. 填空题：

(1) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MN}=$ ________；

(2) 在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=$ ________；

(3) 在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=$ ________；

(4) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=$ ________.

3. 如果 $m(3\vec{a}-2\vec{b})+n(4\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}-5\vec{b}$，求 m，n 的值.

4. 在三角形 ABC 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}$ 为中线，用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示：

(1) $\overrightarrow{BC}$；　　(2) $\overrightarrow{AE}$.

5. 一架飞机向东飞行100公里，然后改变方向，向南飞行100公里，求飞机飞行路程和两次位移的和.

6. 在三角形 ABC 中，M 是 BC 边中点，求证：$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

阅读空间

耐人寻味的数学谜语

谜语是反映人们的智力、观察力、想象力和联想能力的简短韵语．而数学谜语，则是根据数学概念、定义和某些数学知识的主要特征，用形象生动的语句来创作的．

那么怎样通过谜面，猜得一个正确的谜底呢？必须首先知其谜面与谜底的扣合关系，亦即谜语常见的表现方法，谜面如何扣合谜底有其内在的联系，一般称之为谜体，常见的有以下几种：

1. 会意体

会意体是通过谜面去领会谜底，这是一种最常见的、也是变化最丰富的谜体．例如：

诊断以后　　（开方）

抬头望月，正好初八

（正弦．因为初八月亮是“上弦”，“上”含“正”，故为“正弦”）

2. 增损体

增损体是对字进行减、拆、合的变化，以求得谜底．例如：

丞　　（打数学名词三：大于、小于、分子）

3. 象形体

例如，保持距离，同时起飞　　（平行）

4. 拟人体

例如：

女婿的女婿　　（打一分数：$\frac{1}{4}$．俗话说：女婿如半子）

两个寨子隔条岗，南寨没有北寨强；

南寨好汉有五条，不及北寨人一双．　　（打一计算工具：算盘）

5. 谐音体

例如：

掰手腕　　（比例．“例”与“力”谐音）

下面请你试着猜几个谜语：两牛打架；五分线；剃头；大甩卖；垂钓．

资料来源：易南轩，《数学美拾趣》，科学出版社，2006

答案在本单元中寻找

7.3 平面向量的坐标表示

我们知道，在平面直角坐标系内，平面内的每一个点都可以用一对有序实数来表示，这对实数就是点的坐标．同样，在平面直角坐标系内，每一个平面向量也可以用一对实数来表示．

在平面上，建立一个直角坐标系 xOy，设 x 轴上的单位向量为 $\vec{i}$，y 轴上的单位向量为 $\vec{j}$，则 x 轴上的向量总可以表示成 $x\vec{i}$ 的形式，y 轴上的向量总可以表示成 $y\vec{j}$ 的形式，其中 x，y 分别是它们在数轴上的坐标．

设 AC 是直角坐标平面上任意一向量．如图 7－16，以 AC 为对角线，做一个矩形 $ABCD$，使 AB，AD 分别与 x 轴，y 轴平行，则向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$ 可以分别表示成 $x\vec{i}$ 与 $y\vec{j}$．由向量加法的平行四边形法则可知，

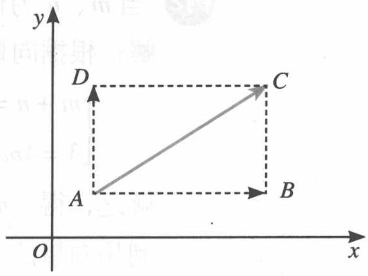


图 7－16

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD},$$

即

$$\overrightarrow{AC}=x\vec{i}+y\vec{j}.$$

事实上，平面直角坐标系中的任一向量都可唯一地表示成

$$\vec{c}=x\vec{i}+y\vec{j}.$$

的形式．

我们把 $\vec{c}=x\vec{i}+y\vec{j}$ 叫做 **$\vec{c}$ 的坐标形式**，把 $x\vec{i}$ 叫做 $\vec{c}$ 在 x 轴上的分向量，把 $y\vec{j}$ 叫做 $\vec{c}$ 在 y 轴上的分向量．把有序数对 (x, y) 叫做**向量 $\vec{c}$ 在直角坐标系中的坐标**，记做 $\vec{c}=(x, y)$，其中 x 叫做 $\vec{c}$ 的**横坐标**，y 叫做 $\vec{c}$ 的**纵坐标**．$\vec{c}=(x, y)$ 叫做**向量的坐标表示**．

例如 $\vec{c}=-2\vec{i}+3\vec{j}$，即 $\vec{c}$ 的坐标是 $(-2, 3)$，可写做 $\vec{c}=(-2, 3)$．

练一练　写出 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{0}$ 的坐标表示．

例1　写出下列向量的坐标表示：

(1) $\vec{a}=4\vec{i}-3\vec{j}$；　　(2) $\vec{b}=-2\vec{j}$.

解：(1) $\vec{a}=4\vec{i}-3\vec{j}=(4, -3)$；

(2) $\vec{b}=-2\vec{j}=(0, -2)$．

如何通过坐标确定两个向量相等呢？我们有下面的结论：

（1）如果两个向量的横坐标，纵坐标分别相等，那么这两个向量相等；
（2）如果两个向量相等，那么它们的横坐标，纵坐标分别相等．

对于向量 $\vec{c}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$，$\vec{c}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$，如果 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$，那么 $\vec{c}_1=\vec{c}_2$；反之，如果 $\vec{c}_1=\vec{c}_2$，那么 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$.

例2 当 m、n 为何值时，$\vec{a}=(m+n)\vec{i}+3\vec{j}$ 与 $\vec{b}=2\vec{i}+(4m-n)\vec{j}$ 相等？

解：根据向量相等的条件，得

$$\begin{cases}m+n=2,\\3=4m-n.\end{cases}$$

解之，得　$m=1$，$n=1$.

利用向量的坐标进行向量的线性运算，会更加简捷．

例3 已知 $\vec{a}=2\vec{i}+4\vec{j}$，$\vec{b}=5\vec{i}+\vec{j}$，计算：

（1）$\vec{a}+\vec{b}$；　　（2）$\vec{a}-\vec{b}$；　　（3）$3\vec{a}$.

解：（1）$\vec{a}+\vec{b}=(2\vec{i}+4\vec{j})+(5\vec{i}+\vec{j})=(2+5)\vec{i}+(4+1)\vec{j}=7\vec{i}+5\vec{j}$.

（2）$\vec{a}-\vec{b}=(2\vec{i}+4\vec{j})-(5\vec{i}+\vec{j})=(2-5)\vec{i}+(4-1)\vec{j}=-3\vec{i}+3\vec{j}$.

（3）$3\vec{a}=3(2\vec{i}+4\vec{j})=(3\times2)\vec{i}+(3\times4)\vec{j}=6\vec{i}+12\vec{j}$.

从上例中，不难看出，向量的线性运算，实质上是向量坐标之间的运算．

一般地，若 $\vec{a}=(x_1, y_1)$，$\vec{b}=(x_2, y_2)$，则有

（1）$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$；

（2）$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2, y_1-y_2)$；

（3）$k\vec{a}=(kx_1, ky_1)$．

想一想　怎样用语言表述上面三个运算法则？

例4 已知 $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ -\frac{1}{2})$，$\vec{c}=(-4,\ 5)$．求 $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$.

解：原式 $=3\times(1,\ 2)+2\times(2,\ -\frac{1}{2})-(-4,\ 5)$

$=(3,\ 6)+(4,\ -1)-(-4,\ 5)$

$=(3+4+4,\ 6-1-5)$

$=(11,\ 0)$．

议一议

设 $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{b}=(x_2,\ y_2)$，其中 $\vec{a}\neq\vec{0}$. 由 $x_1y_2-x_2y_1=0$，能否断定 $\vec{a}/\!/\vec{b}$? 反之，由 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，能否得出 $x_1y_2-x_2y_1=0$.

在图 7－17 中，$\overrightarrow{AB}$ 为平面上任一向量，设 A，B 两点的坐标分别为 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，那么向量 $\overrightarrow{OA}=(x_1,\ y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,\ y_2)$，于是根据向量减法的三角形法则，得到

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,\ y_2)-(x_1,\ y_1)$$
$$=(x_2-x_1,\ y_2-y_1).$$

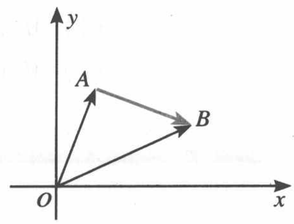


图 7－17

就是说，**平面上任一向量的坐标等于它的终点的坐标减去起点的坐标．**

例5 已知点 M，N 的坐标分别为 $(7,\ -2)$ 和 $(-3,\ 1)$，求向量 $\overrightarrow{MN}$ 和 $\overrightarrow{NM}$ 的坐标．

解：$\overrightarrow{MN}=(-3-7,\ 1+2)=(-10,\ 3)$；

$\overrightarrow{NM}=-\overrightarrow{MN}=-(-10,\ 3)=(10,\ -3)$．

* **例6** 已知平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A，B，C 的坐标分别为 $(1,\ -2)$，$(3,\ 0)$，$(-1,\ 3)$．求顶点 D 的坐标．

解：点 D 的坐标就是向量 $\overrightarrow{OD}$ 的坐标，如图 7－18，而

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$$
$$=(1,\ -2)+(-1-3,\ 3-0)$$
$$=(1,\ -2)+(-4,\ 3)$$
$$=(-3,\ 1).$$

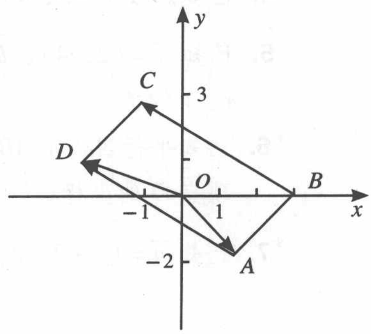


图 7－18

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-3, 1)$.

练习

1. 写出下列向量的坐标表示：

(1) $3\vec{i}-\vec{j}=$________；　(2) $\frac{1}{2}\vec{i}+4\vec{j}=$________；

(3) $\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}=$________；　(4) $-2\vec{j}=$________.

2. 已知 $\vec{a}=(3, -4)$，$\vec{b}=(-5, 3)$，计算：

(1) $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$；　(2) $3\vec{a}+4\vec{b}$；

(3) $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$；　(4) $-2\vec{a}+\vec{b}$.

3. 已知点 M，N 的坐标，求向量 $\overrightarrow{MN}$ 和 $\overrightarrow{NM}$ 的坐标.

(1) $M(4, 2)$，$N(-1, -3)$；

(2) $M(-5, 3)$，$N(0, 1)$.

习题 三

1. 选择题：

(1) 如果 $\vec{a}=(3, 1)$，$\vec{b}=(-2, 5)$，那么 $3\vec{a}-2\vec{b}=$ (　　)；

A. $(2, 7)$　B. $(13, -7)$　C. $(2, -7)$　D. $(13, 13)$

(2) 如果 $M(-2, 2)$，$N(-1, 4)$，那么向量 $\overrightarrow{MN}$ 的坐标是(　　).

A. $(1, 2)$　B. $(-1, -2)$　C. $(0, 3)$　D. $(1, 6)$

2. 已知 $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$，$\vec{b}=3\vec{i}+4\vec{j}$，求 $\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

3. 已知 $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-3\vec{j}$，$\overrightarrow{OB}=-\vec{i}+\vec{j}$，求 $\overrightarrow{OA}$.

4. 已知点 $A(-3, 4)$，$B(2, 5)$，$C(1, 3)$，求 $3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

5. 已知 $\vec{a}=(2, 4)$，$\vec{b}=(-1, -3)$，$\vec{c}=(5, 0)$，且 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，求实数 x，y 的值.

*6. 已知平行四边形 $ABCD$ 中，点 $A(-1, 3)$，$B(0, 6)$，$C(-2, 1)$，求顶点 D 的坐标.

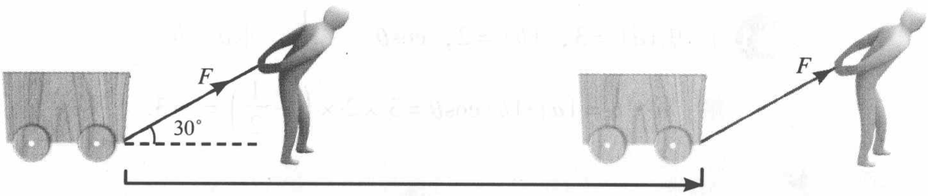
*7. 已知 $\vec{a}=(x+2, 2)$，$\vec{b}=(4, x)$，且 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，求 x.

1. 平面向量的内积

引例

一个小孩在冰面上用与水平方向成30°角斜向上的10牛顿的拉力 F 拉一个小冰车，冰车在水平面上移动了2米的距离，根据物理学知识，我们知道力 F 所做的功 W 是

$$W=|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cos30°=10\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}(\text{焦耳}).$$



这里功 W 是一个数量，它由向量 $\vec{F}$ 和 $\vec{S}$ 的模及其夹角余弦的乘积来确定．像这样由两个向量的模及其夹角余弦的乘积确定一个数量的情况，在其他一些问题中也会遇到，如物理学中的功率 $P=|\vec{F}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$ 等．

若将两个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，设为 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则把射线 OA 与射线 OB 所组成不大于 π 的角叫做 **$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角**，记做 $<\vec{a},\vec{b}>$．显然

$$0\leqslant<\vec{a},\vec{b}>\leqslant\pi,\ <\vec{a},\vec{b}>=<\vec{b},\vec{a}>.$$

在数学中，我们将两个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的模与它们的夹角 θ 的余弦的乘积叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**内积**（又叫做**数量积**），记做 $\vec{a}\cdot\vec{b}$.
即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

其中 θ 表示 $<\vec{a},\vec{b}>$.

从而$\vec{a}\cdot\vec{b}$也可以表示成

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$$

需要注意的是，两个向量的内积的结果是一个实数，可能是正数，可能是负数，也可能是零.

想一想

如果$\vec{a}$，$\vec{b}$是两个非零向量，那么什么条件下：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$； (2) $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$； (3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

例1 已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，求$\vec{a}\cdot\vec{b}$.

解：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=3\times2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-3$.

练一练 如果$|\vec{a}|=\dfrac{1}{2}$，$|\vec{b}|=4$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，那么$\vec{a}\cdot\vec{b}=$________.

例2 已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$，求$<\vec{a},\vec{b}>$.

解：$\because \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$，

且$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$，

$\therefore \cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{6}{3\times4}=\dfrac{1}{2}$.

又 $\because 0\leqslant<\vec{a},\vec{b}>\leqslant\pi$，

$\therefore <\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{3}$.

工具箱

$\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$
$\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$	$\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

向量的内积满足以下运算律：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

(2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

(3) 设k是实数，则 $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

注意：向量的内积运算不满足结合律，即 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\neq\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$.

议一议 举例说明向量的内积不满足结合律.

***例3** 已知 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{3}$，计算：

$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})$.

解：$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})$

$=6\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^2$

$=6|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos0+|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}-2|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\cos0$

$=6\times4\times4\times1+4\times3\times\dfrac{1}{2}-2\times3\times3\times1$

$=84$.

练习

1. 已知 $\vec{i}$，$\vec{j}$ 分别是平面直角坐标系中 x 轴和 y 轴上的单位向量，分别计算：

(1) $\vec{i}\cdot\vec{i}$； (2) $\vec{j}\cdot\vec{j}$； (3) $\vec{i}\cdot\vec{j}$.

2. 根据下列条件，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$：

(1) $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$，$<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{6}$；

(2) $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=2$，$<\vec{a},\vec{b}>=45°$.

3. 已知 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\sqrt{2}$，求 $<\vec{a},\vec{b}>$.

2. 向量内积的坐标运算

设向量 $\vec{a}$ 的坐标为 (x_1, y_1)，向量 $\vec{b}$ 的坐标为 (x_2, y_2)，

即 $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$，$\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$，则

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})\\&=x_1\vec{i}\cdot x_2\vec{i}+x_1\vec{i}\cdot y_2\vec{j}+y_1\vec{j}\cdot x_2\vec{i}+y_1\vec{j}\cdot y_2\vec{j}\\&=x_1x_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+x_1y_2(\vec{i}\cdot\vec{j})+y_1x_2(\vec{i}\cdot\vec{j})+y_1y_2\vec{j}\cdot\vec{j}\end{aligned}$$

这里，$\vec{i}\cdot\vec{i}=1$；$\vec{i}\cdot\vec{j}=0$；$\vec{j}\cdot\vec{j}=1$.

即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$$

就是说，在直角坐标系中，两个向量的内积等于它们的横坐标之积与纵坐标之积的和.

利用向量坐标，我们可以计算 $\vec{a}=(x, y)$的模，即

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

例4 已知 $\vec{a}=(3, -5)$，$\vec{b}=(-2, 4)$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

解： $$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(3, -5)\cdot(-2, 4)\\&=3\times(-2)+(-5)\times4\\&=-26.\end{aligned}$$

前面我们已经思考过，当两个向量垂直时，夹角为$\frac{\pi}{2}$，这时有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

反之，若非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的内积为0，则必然有 $\cos\theta=0$，即 $\theta=\frac{\pi}{2}$.

如果 $\vec{a}=(x_1, y_1)$，$\vec{b}=(x_2, y_2)$，且均为非零向量，则上述结论可以表述为

(1) 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$；

(2) 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$，则 $\vec{a} \perp \vec{b}$.

例5 判断下列各题中的向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是否垂直：

(1) $\vec{a} = (2, -3)$，$\vec{b} = (-6, -4)$；

(2) $\vec{a} = (0, -1)$，$\vec{b} = (-1, 2)$.

解：(1) $\because \vec{a} \cdot \vec{b} = (2, -3) \cdot (-6, -4)$

$= 2 \times (-6) + (-3) \times (-4)$

$= 0$，

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直.

(2) $\because \vec{a} \cdot \vec{b} = (0, -1) \cdot (-1, 2)$

$= 0 \times (-1) + (-1) \times 2$

$= -2$

$\neq 0$，

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不垂直.

练习

1. 填空题：

(1) 若 $\vec{a} = (-4, 3)$，则 $|\vec{a}| =$ ________；

(2) 若 $\vec{b} = (5, -12)$，则 $|\vec{b}| =$ ________.

2. 已知 $\vec{a} = (6, 3)$ $\vec{b} = (4, -8)$，求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

3. 判断下列向量是否相互垂直：

(1) $\vec{a} = (-2, 4)$，$\vec{b} = (8, 4)$；

(2) $\vec{a} = (0, -1)$，$\vec{b} = (9, -2)$.

习题　四

1. 选择题：

(1) 已知$|\vec{a}|=8$，$|\vec{b}|=6$，$<\vec{a},\vec{b}>=\frac{5\pi}{6}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　）；

A. -24　　B. $24\sqrt{3}$　　C. $-24\sqrt{3}$　　D. 16

(2) 已知$\vec{a}=(3,x)$，$\vec{b}=(7,12)$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$x=$（　　）.

A. $-\frac{7}{4}$　　B. $\frac{7}{4}$　　C. $-\frac{7}{3}$　　D. $\frac{7}{3}$

2. 已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$<\vec{a},\vec{b}>=\frac{2\pi}{3}$，求：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}$；　　(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}$；　　(3) $\vec{b}\cdot\vec{b}$.

3. 已知$\vec{a}\cdot\vec{b}=-8\sqrt{2}$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=8$，求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角.

4. 已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$<\vec{a},\vec{b}>=60°$，求：

(1) $(\vec{a}+\vec{b})^2$；　　(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$.

5. 已知 $\vec{a}=(2,3)$，$\vec{b}=(4,11)$，$\vec{c}=(-1,5)$，求：

(1) $2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$；　　(2) $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{c})$.

阅读空间　陈景润与哥德巴赫猜想

请观察

$6=3+3$, $8=3+5$, $10=3+7$, $12=5+7$, $14=3+11$, $16=3+13$, $18=5+13$, $20=3+17$, $22=3+19$, $24=5+19$, …

你从中看出了什么？历史上，数学家们从这些等式中观察出的规律，已经在世界数学界研究了260多年！

“每个大于5的偶数都可以表示成两个素数之和”，这就是著名的哥德巴赫猜想．德国数学家哥德巴赫（Goldbach，Christian，1690. 3. 18—1764. 11. 20）在1742年提出了这个猜想，他说：“我虽然不能证明，但是确信这个论断完全正确”．

◎陈景润

几百年过去了，各国数学家为了证明这个问题绞尽了脑汁，却仍然没有找到证明方法．

我国数学家陈景润（Chen Jingrun，1933. 5. 22—1996. 3. 19）对这个问题的创造性研究，使得他在哥德巴赫猜想研究方面有重大突破．他证明了“每个充分大的偶数都能够表示为1个素数及不超过2个素数的乘积之和”，即如果n是一个大偶数，p、q、r都是素数，那么

$$n=p+q \text{ 或 } n=p+q\cdot r,$$

并在1973年发表了他的论文，引起国际数学界的轰动．这个结果被认为是目前哥德巴赫猜想研究的最好成果，被称为“陈氏定理”．甚至有人说：摘取数学皇冠上的这颗明珠，只差最后一步了．

陈景润这颗数学巨星，因为数学事业长期拼搏，积劳成疾，于1996年3月19日与世长辞，人们永远不会忘记他对数学的伟大贡献，他的名字和哥德巴赫猜想永远地连在了一起．

归纳与总结

1. 知识要点

（1）向量的概念

①具有________和________的量叫做向量，一个向量可以用________直观表示，表示向量的有向线段的长度，叫做向量的________.

②________相等，________相同的两个向量叫做相等的向量.

③零向量的模等于________，单位向量的模等于________.

④平行向量又叫共线向量，是指两个非零向量的方向________.

（2）向量的运算

①向量的加法，减法及数乘向量统称为________，这种运算的结果仍然是________.

②若 $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$，$\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$，则有 $\vec{a}+\vec{b}=$________；$\vec{a}-\vec{b}=$________；$k\vec{a}=$________.

③若 $\vec{a}=(x_1, y_1)$，$\vec{b}=(x_2, y_2)$，则有 $\vec{a}+\vec{b}=$________；$\vec{a}-\vec{b}=$________；$k\vec{a}=$________.

④向量的内积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________，其中 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角的范围是________；向量内积的结果是一个________.

⑤若 $\vec{a}=(x_1, y_1)$，$\vec{b}=(x_2, y_2)$，则有 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________.

（3）公式与定理

①若 $\vec{a}=(x, y)$，则 $|\vec{a}|=$________.

②设 $\vec{a}=(x_1, y_1)$，$\vec{b}=(x_2, y_2)$，若 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，则有________；若________，则有 $\vec{a}/\!/\vec{b}$；

③设 $\vec{a}=(x_1, y_1)\neq\vec{0}$，$\vec{b}=(x_2, y_2)\neq\vec{0}$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则有________；若________，则有 $\vec{a}\perp\vec{b}$.

2. 重点与难点

本单元教材的重点是向量的概念、向量的运算及其坐标表示.

本单元教材的难点是向量的内积运算.

（1）关于向量几何形式的运算

①加法

首尾相接型——三角形法则

如 $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$.

这里一个向量的起点M，恰好是另一个向量的终点，即两个向量首尾相连，和向量以第一个向量的起点为起点，以第二个向量的终点为终点．具体做题时要注意加法交换律的使用．

如 $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}.$

起点相同型——平行四边形法则

如 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}.$

在运算时，作一个以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$为邻边的平行四边形，那么从A点出发的对角线向量就是和向量．

②减法

必须理解相反向量的概念，即$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}.$

理解“减去一个向量等于加上这个向量的相反向量”，从而将向量减法转化为向量加法．

如 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$

③数乘向量

数乘向量的结果仍是向量，这个向量的方向只有两种，或与原向量同向，或与原向量反向．向量长度的改变取决于$|k|$．

(2) 关于向量的加、减及数乘运算

当向量的加法，减法及数乘运算混合进行时，要灵活运用运算律．

如 $(3\vec{a}-2\vec{b})-2(4\vec{a}-\vec{b})$

$=3\vec{a}-2\vec{b}-8\vec{a}+2\vec{b}$

$=-5\vec{a}.$

(3) 关于向量坐标形式的运算

①区分点的坐标与向量的坐标

当向量的起点在原点时，向量的坐标就是向量终点的坐标，这一点很重要．

②向量的坐标运算可以使向量的运算更加便捷．

如 $\vec{a}=(3,\ -1)$，$\vec{b}=(4,\ 2)$，

则 $3\vec{a}+2\vec{b}=3(3,\ -1)+2(4,\ 2)$

$=(9,\ -3)+(8,\ 4)$

$=(17,\ 1)$．

(4) 关于向量的内积运算

①向量的内积定义是一个规定，它不是我们以前学过的实数乘法的延续与扩充，因此与实数乘法并不相同．同时注意乘号只能用“·”，而不能用“×”号代替．

②向量的内积是一个实数，不再是向量，这是它与向量的其他运算不同的地方．

③向量的内积不满足结合律，这一点需要注意．

④应熟记 $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$，$\vec{i}\cdot\vec{j}=0$，$\vec{j}\cdot\vec{j}=1$．（$\vec{i}$，$\vec{j}$ 分别是 x 轴、y 轴上的单位向量），它们在向量坐标形式的运算中经常用到．

（5）向量平行与垂直的条件

设 $\vec{a}=(x_1, y_1)$，$\vec{b}=(x_2, y_2)$ 均为非零向量，则有

① 如果 $x_1y_2-x_2y_1=0$，那么 $\vec{a}/\!/\vec{b}$；如果 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，那么 $x_1y_2-x_2y_1=0$.

② 如果 $x_1x_2+y_1y_2=0$，那么 $\vec{a}\perp\vec{b}$；如果 $\vec{a}\perp\vec{b}$，那么 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

例1 已知 $\vec{a}=(3, -5)$，$\vec{b}=(15, m)$，当 m 为何值时，

（1）$\vec{a}\perp\vec{b}$； （2）$\vec{a}/\!/\vec{b}$？

解：（1）当 $x_1x_2+y_1y_2=0$ 时，$\vec{a}\perp\vec{b}$.

由 $3\times15+(-5)\times m=0$，

得 $m=9$.

即 当 $m=9$ 时，$\vec{a}\perp\vec{b}$.

（2）当 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 时，$\vec{a}/\!/\vec{b}$.

由 $3\times m-(-5)\times15=0$，

得 $m=-25$.

即 当 $m=-25$ 时，$\vec{a}/\!/\vec{b}$.

例2 已知 $\vec{a}=(3, -4)$，$\vec{b}=(-12, -5)$，

（1）求 $|\vec{a}|$ 和 $|\vec{b}|$；

（2）求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$；

（3）求 $\cos<\vec{a}, \vec{b}>$；

（4）判断 $<\vec{a}, \vec{b}>$ 是锐角还是钝角？

解：（1）$\because \vec{a}=(3, -4)$，$\vec{b}=(-12, -5)$，

$\therefore |\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$，$|\vec{b}|=\sqrt{(-12)^2+(-5)^2}=13$.

（2）$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3, -4)\cdot(-12, -5)$

$=3\times(-12)+(-4)\times(-5)$

$=-16$，

(3) $\cos<\vec{a}, \vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-16}{5\times 13}=-\frac{16}{65}$.

(4) $\because 0\leqslant<\vec{a}, \vec{b}>\leqslant\pi$,

且 $\cos<\vec{a}, \vec{b}>=-\frac{16}{65}<0$,

$\therefore <\vec{a}, \vec{b}>$是钝角.

综合练习 七

A 组

1. 填空题：

(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=$________；

(2) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FC}=$________.

2. 选择题：

(1) 若 $M(3,\ -2)$，$N(-5,\ -1)$，$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$，则 P 点的坐标为（　　）；

A. $(-8,\ -1)$　　　　B. $(-1,\ -\frac{3}{2})$

C. $(1,\ \frac{3}{2})$　　　　D. $(8,\ -1)$

(2) 在三角形 ABC 中，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AB}=$（　　）.

A. $\vec{a}+\vec{b}$　　B. $-(\vec{a}+\vec{b})$　　C. $\vec{a}-\vec{b}$　　D. $\vec{b}-\vec{a}$

3. 已知 $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ -3)$，求 $3\vec{a}+4\vec{b}$.

4. 已知 $\vec{a}=(5,\ 6)$，$\vec{b}=(-2,\ y)$，且 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，求 y 的值.

5. 已知 $\vec{a}=(m,\ -2)$，$\vec{b}=(6,\ -3)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，求 m 的值.

6. 已知 $\vec{a}=(7,\ -6)$，$\vec{b}=(5,\ 1)$，求 $|\vec{a}+\vec{b}|$.

7. 若 $|\overrightarrow{AB}|=5$，$|\overrightarrow{AC}|=8$，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

8. 已知 $\vec{a}=(-3,\ 4)$，$\vec{b}=(12,\ 5)$，求 $(4\vec{a}+\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})$.

B 组

1. 选择题：

(1) 下列命题中不正确的是（　　）；

A. 若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，则 $\vec{a}=\vec{b}$

B. 若 $\vec{a}=\vec{b}$，$\vec{b}=\vec{c}$，则 $\vec{a}=\vec{c}$

C. 若 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，$\vec{b}/\!/\vec{c}$，则 $\vec{a}/\!/\vec{c}$

D. 若 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，则 $\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相同或相反

(2) 已知 $\vec{a}=(m,\ 1)$ 与 $\vec{b}=(4,\ m)$ 共线且同向，则 $m=$（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\pm\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. ± 2

2. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的模分别为 4 和 3，夹角为 $\frac{\pi}{3}$，求 $|\vec{a}+\vec{b}|$.

3. 已知 $\vec{a}=(0, 1)$，$\vec{b}=(1, 1)$，且 $\vec{b}+k\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，求 k 的值.

4. 已知 $\vec{a}=(-3, 1)$，$\vec{b}=(-1, 2)$，求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角余弦.

5. 已知向量 $\vec{x}$ 与 $\vec{a}=(2, -1)$ 共线，且满足 $\vec{a}\cdot\vec{x}=-18$，求向量 $\vec{x}$.

6. 已知 $\vec{a}=(1, 3)$，$\vec{b}=(3, 0)$，求下列各角的余弦：

(1) $<\vec{a}, \vec{b}>$；(2) $<\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}>$；(3) $<\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}>$.

数学迷语答案：对顶角；半角；除法；绝对值；等于.

阅读空间

向量与中学数学

早在19世纪，向量就已经成为数学家和物理学家研究的对象，但是直到20世纪初才被引入中学数学．自从向量进入中学后，它不仅成为中学数学的基本概念，而且也成为中学数学中最基本、最重要的内容之一．

向量是代数研究中重要的对象之一．它不仅可以进行加减运算，与实数结合进行数乘运算，而且还可以进行内积等运算．在以后的学习中，我们还能学到向量的其他运算．

向量不仅仅是代数研究的对象，它具有大小和方向，这些都是重要的几何性质，因此它也是几何研究的重要对象．利用向量的几何性质不仅可以帮助我们计算长度、面积、角度等几何度量问题，而且可以帮助我们刻画几何图形（直线、平面等），判断它们的位置关系．

向量还具有强烈的物理学实际背景．物理学中有两种基本量：标量和矢量．矢量遍布在物理学的很多分支，它包括力、位移、速度、加速度、动量等．虽然，物理学中的矢量与数学中的向量并不完全相同，例如力，它除了有方向和大小，还有作用点．数学中的向量则只有方向和大小，没有作用点．但是，这并不影响向量在物理学中的作用．

最后，向量作为沟通代数、几何、物理的桥梁，它还是最重要的数学模型之一．

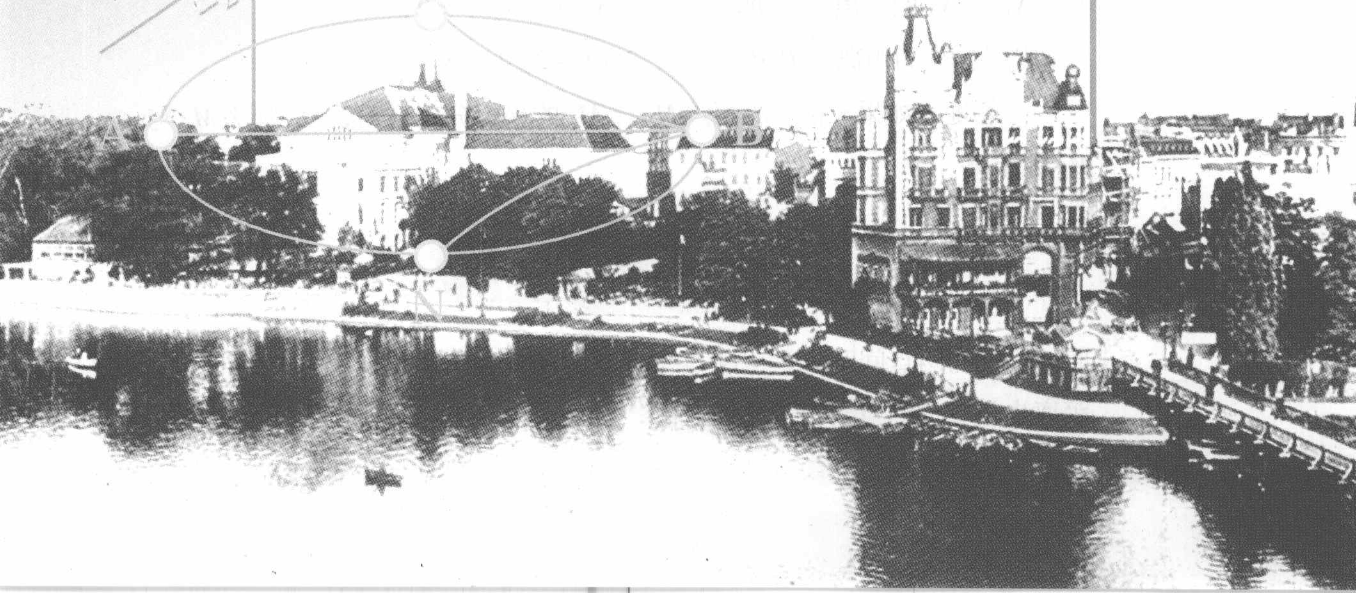
资料来源：马忠林等．数学教育史．广西教育出版社，2001

第八单元　直线与圆的方程

回顾与思考

在初中学习平面几何的时候，我们了解了点、线段、直线、圆等基本概念，并依据这些概念，通过推理论证，研究几何图形的形状、大小和位置关系. 在前边的函数单元中，我们还了解到：一次函数的图像是一条直线，它的解析式可以看做是一个二元一次方程；二次函数的图像是一条抛物线，它的解析式可以看做是一个二元二次方程. 在这里我们似乎看到了几何图形和代数方程之间的某些内在联系. 这自然引起我们的进一步思考：直线与圆这两个平面几何中基本图形的性质是不是可以通过方程，利用代数方法来进行研究？

下面我们将通过学习本单元的内容，尝试回答并解决这个问题.



8.1 两点间距离公式及中点坐标公式

观察与思考

我们在初中就知道了，在平面直角坐标系内，任何一点 P 都可以用有序实数对 (x, y) 表示．我们把 (x, y) 叫做点 P 的坐标，记做 $P(x, y)$．

在平面几何中，对于平面上的两个点，我们会用带有刻度的尺子来测量它们之间的距离，用直尺和圆规来确定它们的中点．那么，在平面直角坐标系内，如果给出了两个点的坐标，我们将怎样计算这两个点的距离并确定这两个点的中点位置呢？

在这里，我们首先学习两个常用的公式，即两点间距离公式和中点坐标公式．

1. 两点间距离公式

我们先看两点都在 x 轴上的情况：

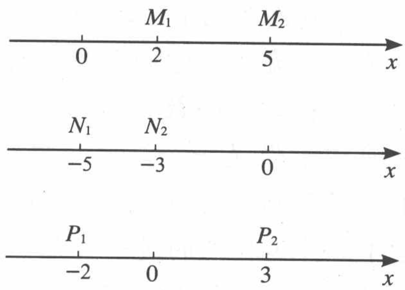


图 8－1

从上图可以直观地看出，

M_1 与 M_2 的距离 $|M_1M_2|=|5-2|=3$，

N_1 与 N_2 的距离 $|N_1N_2|=|-3-(-5)|=2$，

P_1 与 P_2 的距离 $|P_1P_2|=|3-(-2)|=5$.

一般地，如果 x 轴上的两点 M_1 与 M_2 的坐标分别是 x_1，x_2，那么 M_1 与 M_2 的距离

$$|M_1M_2|=|x_2-x_1|$$

即 x 轴上的两点间距离是这两点坐标差的绝对值．同样，y 轴上的两点间距离也是它们两点坐标差的绝对值．

如果 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 是坐标平面上任意两点，如图 8－2，那么它们的距离又如何计算呢？

从 P_1，P_2 两点出发分别向 x 轴，y 轴作垂线，垂足分别是 M_1，M_2，N_1，N_2，再过 P_1 作 P_2M_2 的垂线，垂足为 Q. 在直角三角形 P_1QP_2 中，根据勾股定理，有

$$
\begin{aligned}
|P_1P_2| &= \sqrt{|P_1Q|^2+|QP_2|^2}\\
&= \sqrt{|M_1M_2|^2+|N_1N_2|^2}\\
&= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.
\end{aligned}
$$

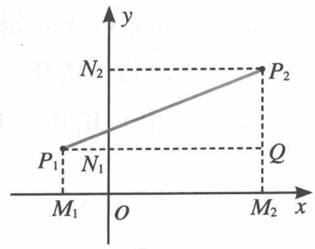


图 8－2

由此得到 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 两点间距离公式

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

例1 计算 $M_1(2, -5)$，$M_2(5, -1)$ 两点间距离.

解：
$$
\begin{aligned}
|M_1M_2| &= \sqrt{(5-2)^2+(-1+5)^2}\\
&= \sqrt{3^2+4^2}\\
&= 5.
\end{aligned}
$$

答： M_1，M_2 两点间距离为 5.

练一练

求下列两点间距离：

(1) $A_1(0, 6)$，$A_2(0, 2)$；　　(2) $B_1(3, 7)$，$B_2(-1, 4)$.

2. 中点坐标公式

设 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 为平面直角坐标系内的任意两点，$P(x, y)$ 为线段 P_1P_2 的中点，则

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

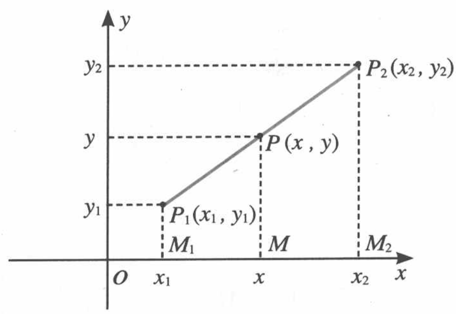


图 8－3

这个公式是如何得到的呢？我们看图 8－3.

设 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 为平面直角坐标系内的任意两点，$P(x, y)$

是线段 P_1P_2 的中点，分别过 P_1，P，P_2 向 x 轴作垂线，垂足分别是 M_1，M，M_2，它们的坐标分别是 x_1，x，x_2，根据平行线的性质，M 是 M_1M_2 的中点．所以 $|M_1M| = |MM_2|$，即 $|x-x_1| = |x_2-x|$．由于 M_1M 与 MM_2 方向一致，故有 $x-x_1=x_2-x$，即 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，用同样的方法可得 $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

工具箱

两条直线被一组平行线所截，如果一条直线被等分，那么另一条直线也被等分．

例2 求连接下列两点的线段的中点坐标：

（1）P_1（6，−4），P_2（−2，5）；

（2）A（a，0），B（0，b）．

解：（1）根据中点坐标公式

$$x=\frac{6-2}{2}=2，y=\frac{-4+5}{2}=\frac{1}{2}.$$

∴ 线段 P_1P_2 的中点坐标是（2，$\frac{1}{2}$）．

（2）根据中点坐标公式

$$x=\frac{a+0}{2}=\frac{a}{2}，y=\frac{0+b}{2}=\frac{b}{2}.$$

∴ 线段 AB 的中点坐标是$\left(\frac{a}{2}，\frac{b}{2}\right)$.

练一练

已知点 P（−8，6），O 是坐标原点，A 是 OP 中点，B 是 AP 中点，求出 A，B 两点的坐标．

例3 已知 A（5，0），B（2，1），C（4，7），求三角形 ABC 中 AC 边上的中线长．

解：设 M（x，y）是 AC 边上的中点，根据中点坐标公式

$$x=\frac{5+4}{2}=\frac{9}{2}，y=\frac{0+7}{2}=\frac{7}{2}.$$

即点 M 的坐标是$\left(\frac{9}{2}，\frac{7}{2}\right)$.

根据两点间距离公式，得

$$|BM| = \sqrt{\left(2-\frac{9}{2}\right)^2+\left(1-\frac{7}{2}\right)^2}$$

工具箱

在三角形中，连接一个顶点和它对边中点的线段叫做**三角形的中线**，每个三角形有三条中线．

$$=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{50}{4}}$$

$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

答：三角形 ABC 中 AC 边上的中线长为$\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

练习

1. 数轴上点 A 的坐标是2，点 M 的坐标是 -3，则 $|AM|=$ ________.

2. 求连接下列两点线段的长度及其中点坐标：

(1) $A(7, 4)$，$B(3, 8)$；

(2) $M(3, 1)$，$N(2, 1)$.

习题 一

1. 求两点 $P_1(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$，$P_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ 的距离.

2. 求点 $M\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$，$N(3, -2)$ 的中点坐标.

3. 已知 M 是线段 AB 的中点，其中点 A 和点 M 的坐标分别是 $(1, -5)$ 和 $(-4, 3)$，求点 B 的坐标.

4. 三角形的三个顶点是 $A(2, 1)$，$B(-2, 3)$，$C(0, -1)$，求其三条中线的长度.

8.2 直线的点斜式和斜截式方程

观察与思考

当我们将一条直线 l 放在平面直角坐标系中的时候（图 8－4），怎样描述它们的具体位置？又如何根据这个位置来确定这条直线的方程呢？

这一节，我们将一步一步地解决这些问题．

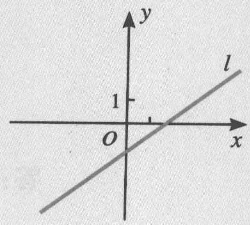


图 8－4

1. 直线的倾斜角和斜率

观察图 8－5，

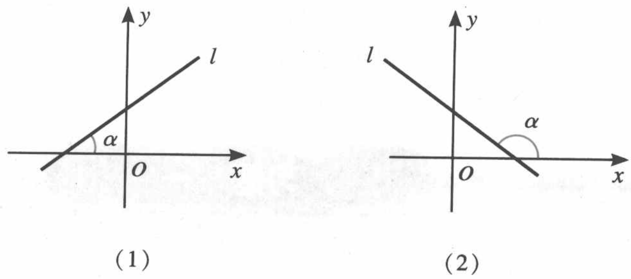


图 8－5

直线 l 在直角坐标系中与两条坐标轴有不同的夹角，我们规定：**直线 l 向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角，叫做直线 l 的倾斜角**．如图 8－5中的 α.

特别地，当直线 l 与 x 轴平行或重合时，我们规定：直线 l 的倾斜角为0°.

因此，直线的倾斜角 α 的取值范围是 $0° \leqslant \alpha < 180°$.

倾斜角不等于90°的直线，它的倾斜角的正切叫做这条直线的**斜率**．直线的斜率通常用 k 表示，即

$$k = \tan\alpha$$

倾斜角等于90°的直线的斜率不存在；倾斜角不等于90°的直线都有确定的斜率．

练一练　若三条直线的倾斜角分别是30°,45°,60°,则它们的斜率各是多少?

在平面上，不重合的两个点可以确定一条直线，从而可以确定这条直线的斜率，那么如何利用这两个点的坐标来计算这条直线的斜率呢？

设过点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 的直线为 l，其倾斜角为 α，斜率为 k.

若 $x_1 = x_2$，则表示直线 l 与 x 轴垂直，其倾斜角为 $90°$，此时直线斜率不存在；

若 $x_1 \neq x_2$，并且直线沿 P_1 至 P_2 的方向是向上的，即 $0° < \alpha < 90°$，如图8－6.

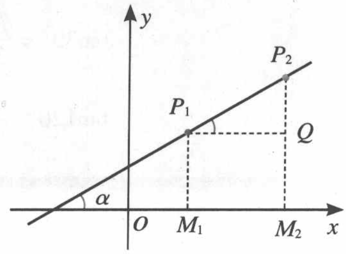


图 8－6

由 P_1，P_2 分别向 x 轴作垂线，垂足为 M_1，M_2，再作 $P_1Q \perp P_2M_2$，垂足是 Q．显然，$\angle P_2P_1Q = \alpha$.

在直角三角形 P_2P_1Q 中，$\tan\alpha = \dfrac{QP_2}{P_1Q} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

即 $$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

当 $90° < \alpha < 180°$ 时，类似地，我们有，$\tan\alpha = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

即 $$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

这样，我们得到了经过点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 的直线的斜率公式

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2)$$

例1 求经过 $A(-2, 3)$ 和 $B(2, -1)$ 两点的直线的斜率和倾斜角．

解： 将两点的坐标 $(-2, 3)$ 和 $(2, -1)$ 代入斜率公式，得

$$k = \frac{-1-3}{2-(-2)} = -1,$$

即 $\tan\alpha = -1$.

$\because$ $0° \leqslant \alpha < 180°$,

$\therefore$ $\alpha = 135°$.

答： 这条直线的斜率为 -1，倾斜角为 $135°$.

工具箱

几个常用特殊角的正切值：

$\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$　　$\tan 45^\circ=1$　　$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

$\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$　　$\tan 135^\circ=-1$　　$\tan 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

练 习

1. 填空：根据直线的倾斜角 α 的取值，确定斜率 k 的数值或范围.

(1) 当 $\alpha=0^\circ$ 时，k ________；

(2) 当 $0^\circ<\alpha<90^\circ$ 时，k ________；

(3) 当 $\alpha=90^\circ$ 时，k ________；

(4) 当 $90^\circ<\alpha<180^\circ$ 时，k ________.

2. 根据下列条件确定直线 l 的倾斜角 α 和斜率 k：

(1) 若直线 l 平行于 x 轴，则 $\alpha=$ ________，$k=$ ________；

(2) 若直线 l 平行于 y 轴，则 $\alpha=$ ________，$k=$ ________.

2. 直线的点斜式方程

已知直线 l 的斜率是 k，并且经过点 $P_1(x_1, y_1)$，求直线 l 的方程(图 8－7).

设点 $P(x, y)$ 是直线 l 上不同于 P_1 的任意一点. 因为直线 l 的斜率是 k，根据过两点的直线的斜率公式，得

$$k=\frac{y-y_1}{x-x_1}\quad(x\neq x_1).$$

将上式加以整理，得

$$\boxed{y-y_1=k(x-x_1)}$$

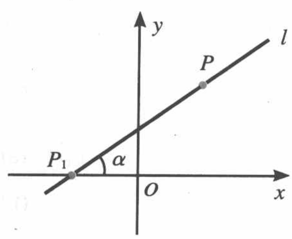


图 8－7

这个方程就是斜率为 k，并且经过点 $P_1(x_1, y_1)$ 的直线 l 的方程.

由于这个方程是由直线上一点和直线的斜率确定的，所以叫做直线的**点斜式**方程.

例2 已知直线 l 的倾斜角为45°，且过点 $A(-2,3)$，求直线 l 的方程.

解： 这条直线过点 $A(-2,3)$，其斜率为

$$k=\tan45°=1,$$

代入点斜式方程，得

$$y-3=x+2,$$

化简，得

$$x-y+5=0.$$

这就是所求的直线方程.

直线的点斜式方程作为代数方程应进行化简，今后如果题目中要求"求直线 l 的方程"，都要对方程进行化简.

例3 直线 l 经过 $P_1(-5,1)$，$P_2(3,-3)$ 两点，求直线 l 的方程.

解： 由于直线 l 经过 $P_1(-5,1)$，$P_2(3,-3)$ 两点，所以其斜率

$$k=\frac{-3-1}{3-(-5)}=-\frac{1}{2}.$$

将点 $P_1(-5,1)$ 的坐标和 $k=-\frac{1}{2}$ 代入点斜式方程，得

$$y-1=-\frac{1}{2}(x+5),$$

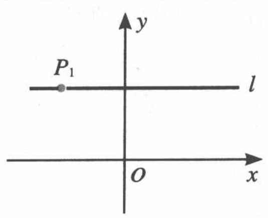
化简后，直线 l 的方程为

$$x+2y+3=0.$$

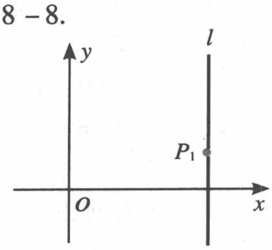
议一议

上例中，如果将点 $P_2(3,-3)$ 的坐标和 $k=-\frac{1}{2}$ 代入点斜式方程，得到的直线 l 的方程还一样吗？

下面我们考虑两种特殊情况，如图8-8.



(1)



(2)

图8-8

（1）直线 l 经过点 $P_1(x_1, y_1)$，且平行于 x 轴时，求直线 l 的方程．

因为 l 平行于 x 轴，倾斜角 $\alpha=0°$，所以斜率 $k=0$. 将点 $P_1(x_1, y_1)$ 的坐标和 $k=0$ 代入点斜式方程，得

$$y-y_1=0(x-x_1),$$

化简，得

$$y=y_1$$

这就是经过点 $P_1(x_1, y_1)$，且平行于 x 轴时直线 l 的方程．

$y=y_1$ 表明直线 l 上的每一点的纵坐标都等于 y_1，当然，纵坐标等于 y_1 的点也都在直线 l 上．

特别地，当直线 l 与 x 轴重合时，方程为 $y=0$.

（2）直线 l 经过点 $P_1(x_1, y_1)$，且平行于 y 轴时，求直线 l 的方程．

因为 l 平行于 y 轴，倾斜角 $\alpha=90°$，所以斜率 k 不存在，它的方程不能用点斜式表示，但是因为 l 上的每一点的横坐标都等于 x_1，所以它的方程可以表示为

$$x=x_1$$

特别地，当直线 l 与 y 轴重合时，方程为 $x=0$.

练习

1. 填空题：

（1）过点 $A(2, -3)$，倾斜角为 $0°$的直线方程为________；

（2）过点 $B(5, -1)$，倾斜角为 $90°$的直线方程为________；

（3）过点 $C(0, 4)$，且与 x 轴平行的直线方程为________；

（4）过点 $D(6, 3)$，且与 y 轴平行的直线方程为________.

2. 已知直线经过点 $(4, -3)$，斜率为 -2，写出直线的点斜式方程．

3. 已知直线经过下列两点，求出它们的方程．

（1）$P_1(2, 1)$，$P_2(0, -3)$；　（2）$P_1(-1, -5)$，$P_2(2, 1)$．

3. 直线的斜截式方程

一条直线与 y 轴交点的纵坐标，叫做这条直线在 **y 轴上的截距**．例如若直线 l 与 y 轴交于点 $(0，b)$，则 b 就是直线 l 在 y 轴上的截距．

如果已知直线 l 的斜率是 k，在 y 轴上的截距是 b，那么如何求出直线 l 的方程呢?

因为 b 是直线 l 在 y 轴上的截距，所以直线 l 与 y 轴的交点为 $(0，b)$，又知直线 l 的斜率是 k，将它们代入点斜式方程，得

$$y-b=k(x-0),$$

化简，得

$$\boxed{y=kx+b}$$

这个方程就是斜率是 k，在 y 轴上的截距是 b 的直线 l 的方程．

由于这个方程是由直线的斜率和直线在 y 轴上的截距确定的，所以叫做直线的**斜截式**方程．

练一练

根据直线 l 的斜截式方程，写出它们的斜率和在 y 轴上的截距：

(1) $y=3x-2$，$k=$______，$b=$______；

(2) $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$，$k=$______，$b=$______；

(3) $y=-x-1$，$k=$______，$b=$______；

(4) $y=\sqrt{3}x-\sqrt{2}$，$k=$______，$b=$______．

议一议　直线方程的斜截式与一次函数的解析式有什么不同?

例4 求与 y 轴交于点 $(0，-4)$，且倾斜角为 $150°$ 的直线方程．

解：$\because$ 直线与 y 轴交于点 $(0，-4)$，

$\therefore$ 直线在 y 轴上的截距是 -4.

又$\because$ 直线的倾斜角为 $150°$，

$\therefore$ 直线的斜率 $k=\tan 150°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

将它们代入斜截式方程，得

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-4,$$

化简，得

$$\sqrt{3}x+3y+12=0.$$

这就是与 y 轴交于点$(0,\ -4)$，且倾斜角为150°的直线方程．

例5 已知直线 l 过点$(3,\ 0)$，在 y 轴上的截距是 -2，求直线 l 的方程．

解： ∵ 直线过点$(3,\ 0)$，且在 y 轴上的截距是 -2，

∴ 直线 l 过点$(3,\ 0)$和$(0,\ -2)$．

将它们代入斜率公式，得

$$k=\frac{-2-0}{0-3}=\frac{2}{3}.$$

又知，直线 l 在 y 轴上的截距是 -2，即 $b=-2$.

将它们代入斜截式方程，得

$$y=\frac{2}{3}x-2,$$

化简，得

$$2x-3y-6=0.$$

这就是所求直线 l 的方程．

练 习

1. 写出符合下列条件的直线 l 的斜截式方程：

（1）$k=\frac{1}{2}$，$b=-3$；

（2）$\alpha=45°$，$b=2$.

2. 求下列直线 l 的方程：

（1）直线 l 的倾斜角 $\alpha=30°$，并且过点$(0,\ \frac{1}{3})$；

（2）直线 l 的斜率 $k=-3$，并且在 y 轴上的截距是 6.

习题 二

1. 选择题：

(1) 如果直线 l 经过点 $(-2, 0)$ 和 $(-5, 3)$，那么直线 l 的倾斜角是(　　)；

A. 150°　　B. 135°　　C. 75°　　D. 45°

(2) 直线倾斜角 α 的取值范围是(　　)；

A. $0° < \alpha < 180°$　　B. $0° < \alpha \leqslant 180°$

C. $0° \leqslant \alpha < 180°$　　D. $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$

(3) 下面结论中不正确的是(　　).

A. 所有的直线都有倾斜角　　B. 所有的直线都有斜率

C. 斜率不存在的直线有无数条　　D. 斜率可以是任意实数

2. 填空题：

(1) 直线 $x+1=0$ 与________轴平行；

(2) 直线 $y-2=0$ 与________轴平行；

(3) 直线 $y-2=x+1$ 的斜率 $k=$________，倾斜角 $\alpha=$________；

(4) 直线 $2x+y-7=0$ 的斜率 $k=$________，截距 $b=$________.

3. 根据条件，写出直线 l 的点斜式方程：

(1) 过点 $(-4, -4)$，$k=\dfrac{1}{4}$；

(2) 过点 $(5, 3)$，$\alpha=60°$.

4. 根据条件，写出直线 l 的斜截式方程：

(1) $k=\dfrac{3}{2}$，$b=-2$；

(2) $\alpha=120°$，与 y 轴交于点 $(0, \sqrt{3})$.

5. 求出符合下列条件的直线 l 的方程：

(1) $b=5$，且与 x 轴平行；

(2) 过点 $(-3, -1)$，且与 x 轴垂直；

(3) 过点 $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$，$\alpha=135°$；

(4) 过点 $(0, 0)$，$k=\dfrac{4}{5}$.

6. 已知直线经过下列两点，求出直线的斜率，再利用点斜式写出直线方程.

(1) $M(4, -3)$，$N(1, -9)$；

(2) $P(3, 2)$，$Q(-5, 4)$.

8.3 直线的一般式方程

观察与思考

当我们无论是用点斜式还是斜截式求出直线方程后，一经整理化简，都变成了二元一次方程，难道直线方程与二元一次方程之间存在着什么必然的关系吗？让我们在这一节解开这个谜．

（1）在平面直角坐标系中，任何直线的方程都可以表示成 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为零）的形式．

我们知道，在平面直角坐标系中，任何直线都有倾斜角 α（$0°\leqslant\alpha<180°$）．

当 $\alpha\neq90°$时，直线都有斜率，其方程可以写成下面的形式

$$y=kx+b,$$

这是一个二元一次方程；

当 $\alpha=90°$时，直线没有斜率，其方程可以写成下面的形式

$$x=x_1,$$

这也是一个二元一次方程，其中 y 的系数是0.

由上述可知，在平面直角坐标系中，任何直线都可以求得它的方程，而且都是二元一次方程．也就是说任何直线的方程都可以写成关于 x，y 的一次方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为零）的形式．

（2）方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为零）总表示直线．

我们知道，关于 x，y 的一次方程的一般形式是

$$Ax+By+C=0\ (A,\ B \text{ 不同时为零}).$$

当 $B\neq0$ 时，方程可以化为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

这是直线的斜截式方程，它表示斜率 $k=-\frac{A}{B}$，在 y 轴上的截距 $b=-\frac{C}{B}$的直线．

当 $B=0$ 时，必有 $A\neq0$，方程可以化为

$$x=-\frac{C}{A}.$$

它表示一条与 y 轴平行($C\neq 0$) 或重合($C=0$) 的直线.

由上述可知，关于 x，y 的一次方程总表示直线.

根据（1)、(2）两方面的结论，我们称方程

$$Ax+By+C=0$$

为直线的**一般式**方程（其中 A，B 不同时为零）.

直线 l 的方程是 $Ax+By+C=0$，可以记做 l：$Ax+By+C=0$.

例1 求直线 l：$2x-3y+6=0$ 的斜率和在 y 轴上的截距.

解法1：（将直线 l 的方程化为斜截式）

将原方程移项，得

$$3y=2x+6.$$

方程两边同被 3 除，得

$$y=\frac{2}{3}x+2.$$

这是直线 l 的斜截式方程，可以看出其斜率为$\frac{2}{3}$，在 y 轴上的截距为 2.

解法2：（利用 $k=-\frac{A}{B}$，$b=-\frac{C}{B}$求 k，b）

在方程 $2x-3y+6=0$ 中，

$\because$ $A=2$，$B=-3$，$C=6$，

$\therefore$ $k=-\frac{A}{B}=\frac{2}{3}$，$b=-\frac{C}{B}=2.$

故直线 l 的斜率为$\frac{2}{3}$，在 y 轴上的截距为 2.

例2 画出方程 $4x-3y-12=0$ 表示的直线.

解：在方程 $4x-3y-12=0$ 中，令 $x=0$，得 $y=-4$，令 $y=0$，得 $x=3$.

可知，直线过点 $A(0，-4)$，$B(3，0)$.

如图 8－9，在平面直角坐标系中，作出 $A(0，-4)$，$B(3，0)$ 两点，并过 A，B 作直线，则直线 AB 就是方程 $4x-3y-12=0$ 表示的直线.

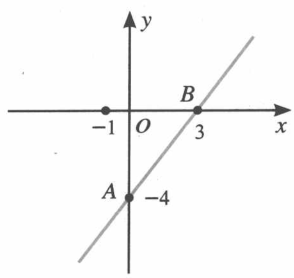


图 8－9

练习

1. 根据下列条件写出直线方程，并化为一般式：

(1) 经过点$(-3, 5)$，斜率是-2；

(2) 倾斜角是$120°$，在y轴上的截距为4.

2. 将下列直线方程化为斜截式：

(1) $4x-2y-1=0$；

(2) $5x+3y-2=0$.

习题 三

1. 根据下列条件写出直线的一般式方程：

(1) 斜率是$\frac{\sqrt{3}}{3}$，经过点$(8, -2)$；

(2) 经过点$(-2, 0)$，与x轴垂直；

(3) 经过点$(-1, 8)$和$(4, -2)$；

(4) 斜率是-4，在y轴上的截距是-7.

2. 求出下列直线的斜率：

(1) $x-4y-2=0$；　　(2) $3x+\sqrt{3}y+1=0$.

3. 已知三角形ABC三个顶点是$A(2, 1)$，$B(0, 7)$，$C(-4, 1)$，求三条中线所在的直线方程.

4. 直线与y轴的交点到原点的距离是2，斜率是-3，求直线方程并画出图形.

8.4 两条直线的位置关系

观察与思考

现在，我们可以使平面直角坐标系中的每一条直线与一个二元一次方程相对应，如何利用直线的方程来研究两条直线的位置关系呢？

两条直线相交时，怎样利用方程求出它们的交点坐标？

两条直线平行时，它们的方程有怎样的关系和特点？

两条直线垂直时，它们的方程有怎样的关系和特点？

下面，我们将一一回答这些问题．

1. 两条相交直线的交点

设两条直线的方程是：

l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，

l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$.

如果这两条直线相交，由于交点同时在 l_1 和 l_2 上，交点坐标必须同时满足两个方程，是这两个方程的唯一公共解；反过来，如果这两个直线方程只有一个公共解，那么以这个解为坐标的点必是直线 l_1 和 l_2 的交点，因此两条直线是否有交点，就要看方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$$

是否有唯一解．

例1 如图 8－10，求下列两条直线的交点：

l_1：$2x+3y-7=0$，

l_2：$5x-2y-8=0$.

解： 解方程组

$$\begin{cases}2x+3y-7=0,\\5x-2y-8=0,\end{cases}$$

得，$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

即直线 l_1 和 l_2 的交点是 $P(2，1)$．

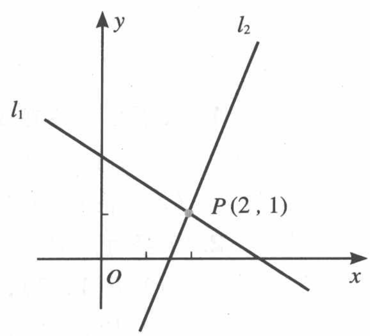


图 8－10

练一练

求下列两条直线的交点：

（1）l_1：$x-2y+3=0$ 与 l_2：$x+2y-9=0$；

（2）l_1：$2x-y-3=0$ 与 l_2：$4x+5y+1=0$.

例2 求经过点 $P(3, 1)$ 及两条直线 l_1 和 l_2 交点 Q 的直线方程：

l_1：$x-2y+2=0$，

l_2：$2x-y-2=0$.

解： 解方程组

$$\begin{cases} x-2y+2=0, \\ 2x-y-2=0, \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$$

即直线 l_1 和 l_2 交点是 $Q(2, 2)$.

将点 $P(3, 1)$ 及 $Q(2, 2)$ 的坐标代入斜率公式，得

$$k=\frac{2-1}{2-3}=-1.$$

将斜率 $k=-1$ 及 $Q(2, 2)$ 的坐标代入直线方程的点斜式，得

$$y-2=-1\times(x-2),$$

即
$$x+y-4=0.$$

这就是经过点 $P(3, 1)$ 及两条直线 l_1 和 l_2 交点 Q 的直线方程 .

练习

1. 求下列两条直线的交点：

（1）l_1：$x=2$ 与 l_2：$y=-3$；

（2）l_1：$2x-5y+3=0$ 与 l_2：$x-2y-2=0$.

2. 求经过点 P 及两条直线 l_1 和 l_2 交点 Q 的直线方程：

（1）$P(1, 2)$，l_1：$x-2y+3=0$ 与 l_2：$x+2y-9=0$；

（2）$P(3, 5)$，l_1：$2x-y-3=0$ 与 l_2：$4x+5y+1=0$.

2. 两条直线平行的条件

平面内不重合的两条直线只有相交和平行两种位置关系，下面我们将利用直线的斜截式方程来讨论两条直线平行的条件.

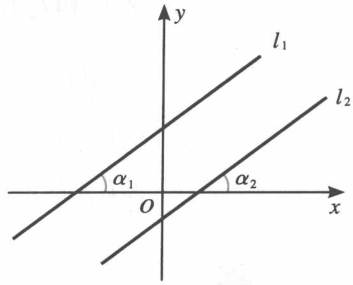


图 8-11

如图 8-11，设两条直线的方程分别为：

l_1：$y=k_1x+b_1$，倾斜角为 α_1，

l_2：$y=k_2x+b_2$，倾斜角为 α_2.

如果 $l_1 /\!/ l_2$，那么 $\alpha_1=\alpha_2$，于是

$\tan\alpha_1=\tan\alpha_2$，

即 $k_1=k_2$.

反过来，对于不重合的两条直线 l_1 和 $l_2(b_1\neq b_2)$，

如果 $k_1=k_2$，

即 $\tan\alpha_1=\tan\alpha_2$，

由于 $0°\leqslant\alpha_1<180°$，$0°\leqslant\alpha_2<180°$，

故有 $\alpha_1=\alpha_2$.

又因为 $b_1\neq b_2$，即

l_1 和 l_2 不重合，所以 $l_1 /\!/ l_2$.

由上述可知，两条直线有斜率且不重合时，如果它们平行，那么它们的斜率相等；反之，如果它们的斜率相等，那么它们平行.

即

$$\boxed{l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2}$$

当两条直线的斜率都不存在时，它们的倾斜角是 90°，此时，它们都垂直于 x 轴，因此这两条直线也是平行的.

例3 已知两条直线 l_1 和 l_2 的方程分别为：

l_1：$x-2y+1=0$；

l_2：$3x-6y-5=0$.

求证：$l_1 /\!/ l_2$.

证明： 将 l_1 和 l_2 的方程化成斜截式，得

$$l_1：y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2},$$

$$l_2：y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{6},$$

可知，l_1 和 l_2 的斜率 $k_1=k_2=\frac{1}{2}$；

又 l_1 和 l_2 在 y 轴上的截距分别是

$$b_1=\frac{1}{2}，b_2=-\frac{5}{6}.$$

$\because k_1=k_2$，且 $b_1\neq b_2$，

$\therefore l_1 /\!/ l_2$.

议一议

如果直线 $2x+3y+5=0$ 与直线 $2x+3y+m=0$ 平行，那么 m 的取值范围是什么？

例4 求过点 $A(-3,5)$ 且与直线 $4x-3y+7=0$ 平行的直线方程.

解： 因为直线 $4x-3y+7=0$ 的斜率是 $\frac{4}{3}$，而所求的直线与已知直线平行，所以它的斜率也是 $\frac{4}{3}$.

根据点斜式，所求直线方程为

$$y-5=\frac{4}{3}(x+3),$$

即

$$4x-3y+27=0.$$

练习

1. 判断下列各对直线是否平行：

（1）$2x-5y+2=0$ 与 $4x-10y+1=0$；

（2）$3x-y+\frac{1}{2}=0$ 与 $6x-2y+1=0$.

2. 求过点 $A(1,-4)$ 且与直线 $2x-y+2=0$ 平行的直线方程.

3. 两条直线垂直的条件

下面我们将利用直线的斜截式方程来讨论两条直线垂直的条件.

设两条直线的方程分别为：

l_1：$y=k_1x+b_1$，倾斜角为 α_1，

l_2：$y=k_2x+b_2$，倾斜角为 α_2.

如果 $l_1 \perp l_2$，显然 $\alpha_1 \neq \alpha_2$，不妨设 $\alpha_1 > \alpha_2$，如图 8－12.

由三角形外角定理知，$\alpha_1 = 90° + \alpha_2$，

所以

$$\begin{aligned}\tan\alpha_1 &= \tan(90° + \alpha_2), \\ &= -\cot\alpha_2 \\ &= -\frac{1}{\tan\alpha_2},\end{aligned}$$

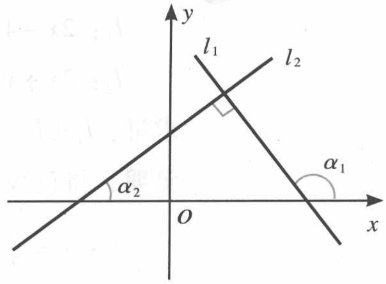


图 8－12

即 $\quad k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ 或 $k_1 \cdot k_2 = -1.$

反过来，如果 $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ 或 $k_1 \cdot k_2 = -1$，则有

$$\begin{aligned}\tan\alpha_1 &= -\frac{1}{\tan\alpha_2} \\ &= -\cot\alpha_2 \\ &= \tan(90° + \alpha_2),\end{aligned}$$

工具箱

三角形外角定理：三角形的任意一个外角等于其不相邻的两个内角和．

$\because 0° \leqslant \alpha_1 < 180°$，$0° \leqslant \alpha_2 < 180°$，

$\therefore \alpha_1 = 90° + \alpha_2$，

$\therefore l_1 \perp l_2$.

由上述可知，两条直线都有斜率时，如果它们互相垂直，那么它们的斜率互为负倒数；反之，如果它们的斜率互为负倒数，那么它们互相垂直．

即

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

或

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$$

想一想

如果在直线 l_1 和 l_2 中，l_1 的斜率不存在，那么 l_1 和 l_2 在什么条件下垂直？

例5 已知直线

$$l_1: 2x-4y+5=0,$$

$$l_2: 2x+y-3=0.$$

求证：$l_1 \perp l_2$.

证明：将直线 l_1 和 l_2 的方程化成斜截式，

$$l_1: y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4},$$

$$l_2: y=-2x+3.$$

得 $$k_1=\frac{1}{2},\ k_2=-2.$$

显然 $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$，

所以 $$l_1 \perp l_2.$$

例6 求过点 $A(-3,5)$ 且与直线 $4x-3y+7=0$ 垂直的直线方程.

解：因为直线 $4x-3y+7=0$ 的斜率是$\dfrac{4}{3}$，而所求的直线与已知直线垂直，所以，所求直线的斜率是 $-\dfrac{3}{4}$.

根据直线方程的点斜式，所求直线方程为

$$y-5=-\frac{3}{4}(x+3),$$

即 $$3x+4y-11=0.$$

练习

1. 判断正误：

 (1) 互相垂直的两条直线的斜率一定互为负倒数； ( )

 (2) 斜率互为负倒数的两条直线一定互相垂直. ( )

2. 判断下列各对直线是否垂直：

 (1) $2x-5y+2=0$ 与 $10x+4y+1=0$；

 (2) $y=x$ 与 $2x-2y+1=0$.

习题 四

1. 判断下列各对直线的位置关系是平行、相交且垂直，还是相交而不垂直？

(1) $3x+4y-5=0$ 与 $6x+8y+10=0$； (　　)

(2) $5x-3y+4=0$ 与 $3x+5y+6=0$； (　　)

(3) $4x+9y-5=0$ 与 $2x+3y+10=0$； (　　)

(4) $2x-7y+10=0$ 与 $7x-2y-8=0$. (　　)

2. 求过点 A (4，1) 且与直线 $2x-7y+1=0$ 平行的直线方程.

3. 求过点 A (2，−3) 且与直线 $3x-6y-2=0$ 垂直的直线方程.

4. 求斜率为 −2，且过直线 $3x-y+4=0$ 与 $x+y-4=0$ 的交点的直线方程.

5. 求平行于直线 $4x-3y-7=0$，且过直线 $2x+y-8=0$ 与 $x-2y+1=0$ 的交点的直线方程.

6. 求垂直于直线 $3x-2y+4=0$，且过直线 $2x-3y+1=0$ 与 $3x-4y-2=0$ 的交点的直线方程.

*7. 已知直线 $3x+(1-a)y+5=0$ 与 $x-y=0$ 平行，求 a 的值.

8.5 点到直线的距离

观察与思考

如图8－13，直线外一点P和直线l上的点连接所组成的线段中，垂线段最短，我们把它叫做**点P到直线l的距离**，记做d.

在平面直角坐标系中，如果知道了直线的方程和一个点的坐标，怎样来计算这个点到这条直线的距离呢？

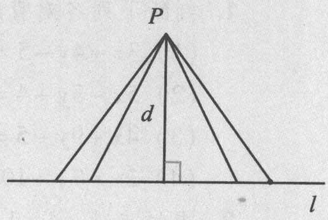


图8－13

设点$P(x_0, y_0)$为直线l：$Ax+By+C=0$外一点，则

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

这就是**点到直线的距离公式**（证明略）.

注意：使用公式时，直线方程必须是一般式方程.

议一议

如果$A=0$或$B=0$，这个公式仍然成立，但是在这种情况下，求点到直线的距离还需要用这个公式吗？

练一练

求下列点到直线的距离：

（1）点$M(2, 3)$，直线l：$x=3$；（2）点$M(3, -1)$，直线l：$y=4$.

例1 根据下列条件，求点P到直线l的距离：

（1）$P(-1, 1)$，l：$2x+y-3=0$；

（2）$P(2, -3)$，l：$y=-x+\frac{1}{2}$.

解：设点P到直线l的距离为d.

（1）$A=2$，$B=1$，$C=-3$，$x_0=-1$，$y_0=1$，将它们代入公式，得

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2\times(-1)+1\times1-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

（2）将直线 l 的方程化为一般式，得

$$2x+2y-1=0.$$

这里，$A=2$，$B=2$，$C=-1$，$x_0=2$，$y_0=-3$，将它们代入公式，得

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2\times2+2\times(-3)-1|}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

*例2 求两条平行直线 l_1：$4x-3y+9=0$ 与 l_2：$4x-3y-1=0$ 之间的距离.

学习小贴示

与两条平行线都垂直的直线叫做这两条平行线的**公垂线**，连接两个垂足的线段叫做这两条平行线的**公垂线段**，两条平行线的公垂线段的长度，叫做**两条平行线的距离**．两条平行线的距离处处相等．

解：在直线 l_1：$4x-3y+9=0$ 上任取一点 $P(0,3)$，则点 P 到 l_2 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4\times0+(-3)\times3-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2.$$

即两条平行直线 l_1 与 l_2 之间的距离为2.

练习

1. 根据下列条件，求点 P 到直线 l 的距离：
（1）$P(1,0)$，l：$4x-3y+1=0$；
（2）$P(2,1)$，l：$3x+4y=0$；
（3）$P(2,-3)$，l：$y=\frac{1}{2}x+1$.

*2. 已知点 $P(1,m)$ 到直线 l：$3x-4y-6=0$ 的距离为1，求 m 的值.

习题 五

1. 根据下列条件，求点 P 到直线 l 的距离：
（1）$P(4,-3)$，l：$y-5=0$；
（2）$P(-2,-1)$，l：$x-3y=0$；
（3）$P(1,-4)$，l：$y=2x-5$.
2. 求下列两条平行直线间的距离：
（1）$3x+4y+12=0$ 与 $3x+4y-3=0$；
（2）$5x-12y+7=0$ 与 $5x-12y-6=0$.

阅读空间

欧拉与七座桥的故事

欧拉（Leonard Euler，1707. 4. 15—1783. 9. 18）出生在瑞士的一个牧师家里，他在青少年时期如饥似渴地读了许多数学家的著作．18 岁开始发表数学论文，26 岁时领导了圣彼得堡科学院高等数学研究室．他一生留下了 886 篇论文和著作，几乎在数学的每个领域都留下了他的足迹．在他去世后，圣彼得堡科学院为整理他那浩如烟海的著作和论文，整整忙碌了 47 年．

虽然欧拉是一位数学巨匠，但他谦虚随和，乐于助人，对别人的事有求必应．有一天他接到一封信，那是从普鲁士的柯尼斯堡寄来的．

柯尼斯堡是一座僻静的小镇，普内格尔河从它身旁轻盈流过，河中有两个小岛，河的两岸各有 3 座桥与它们相连，还有一座桥架在两个小岛之间，如图 8 – 14.

图 8 – 14

有人提出，一个人散步能否一次走遍七座桥，每座桥只走一次，最后再回到原出发点？这个问题无人能回答，最后只好写信求助大数学家欧拉，欧拉对此进行了认真的研究．

他首先发现这实际是一个“一笔画”问题，即把两个岛和两岸分别看做四个点，把七座桥看做连接这些点的弧线，如图 8 – 15.

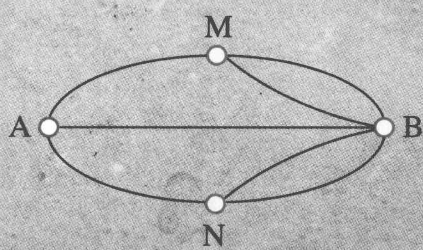


图 8 – 15

于是问题变成了“能否由任一点出发，笔不离纸而一笔画出这个图形”的一笔画问题．

欧拉把引出奇数条线的点叫做奇点，他证明了，如果一个图形中奇点的个数超过两个，那么这个图形不能一笔画成．由此欧拉断定七座桥不能不重复地一次走完并回到原出发点．

欧拉通过抽象地分析建立了一个新的数学基本概念．通过解决七座桥问题的启示，他找到了一个可判别任何图形能否一笔画成的原则，这个原则被叫做一笔画定理．

由于欧拉有强烈的好奇心，非凡的洞察力，理解力和丰富的想象力，以及勤奋的工作态度、坚忍不拔的精神，所以他能解决别人难以解决的问题，不愧是一位数学巨匠．

想一想：下面两个图能分别一笔画成吗？为什么？

（1）　　　　（2）

图 8－16

8.6 圆的方程

观察与思考

我们已经初步体会了用方程研究直线的便利和用直线反映相关方程的直观．那么其他曲线是否也可以建立与某一类方程之间的关系呢？

1. 曲线与方程

一条曲线可以看成是一个点按照某种规律运动形成的，我们把这个点叫做**动点**，这条曲线叫做**动点的轨迹**．

我们在初中已经知道：

到一条线段的两端距离相等的点的轨迹是这条线段的垂直平分线；

到一个定点距离等于定长的点的轨迹是以定点为圆心，定长为半径的圆．

一般地，曲线可以看成是一个动点按照某种规律运动形成的轨迹，也可以看做是符合某种条件的所有的点构成的集合．

在坐标平面内，点用它的坐标(x, y)表示．如果把曲线(包括直线)看成是适合某种条件的点的集合，那么它可以用含有 x，y 的二元方程来表示．

例如，在平面直角坐标系中，第一、三象限的平分线是一条直线，可以用直线方程 $y=x$ 表示．因为如果点 $M(x_0, y_0)$是这条直线上的一点，它到两坐标轴的距离一定相等，即 $y_0=x_0$，那么它的坐标(x_0, y_0)是方程 $y=x$ 的解；反之，如果(x_0, y_0)是方程 $y=x$ 的解，即 $y_0=x_0$，那么以这个解为坐标的点 $M(x_0, y_0)$到两条坐标轴的距离相等，它一定在这条平分线上．于是我们说 $y=x$ 是这条平分线的方程．这个方程表示的几何图形是第一、三象限的平分线，如图 8－17.

一般地，如果某曲线 C 上的点与一个二元方程 $f(x, y)=0$ 的解具有如下的对应关系：

（1）曲线上的点的坐标都是这个方程的解；

（2）以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点，那么，这个方程叫做**曲线的方程**；这条曲线叫做**方程的曲线**．

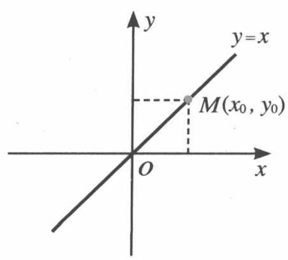


图 8－17

由曲线的方程的定义可知，如果曲线 C 的方程是 $f(x, y)=0$，那么点 $P_0(x_0, y_0)$ 在曲线 C 上的条件是 $f(x_0, y_0)=0$.

例1 判定点 $A(2\sqrt{2}, -1)$，$B(-2, 2)$ 是否在曲线 $x^2+y^2=9$ 上.

解：将点 A 的坐标代入方程 $x^2+y^2=9$ 的左端，得

$$(2\sqrt{2})^2+(-1)^2=8+1=9.$$

$\because$ 点 A 的坐标满足方程 $x^2+y^2=9$，

$\therefore A(2\sqrt{2}, -1)$ 在曲线 $x^2+y^2=9$ 上.

将点 B 的坐标代入方程 $x^2+y^2=9$ 的左端，得

$$(-2)^2+(-2)^2=4+4=8.$$

$\because$ 点 B 的坐标不满足方程 $x^2+y^2=9$，

$\therefore B(-2, 2)$ 不在曲线 $x^2+y^2=9$ 上.

练一练 判定点 $A(-1, -1)$，$B(\sqrt{3}, 3)$ 两点是否在曲线 $x^2-y=0$ 上.

例2 已知直线 l：$3x-2y+C=0$ 过点 $P(4, -1)$，求 C 的值.

解：$\because$ 直线 l：$3x-2y+C=0$ 过点 $P(4, -1)$，

$\therefore$ 点 P 的坐标是方程 $3x-2y+C=0$ 的解.

将坐标 $(4, -1)$ 代入方程 $3x-2y+C=0$，

即 $\quad 3\times4-2\times(-1)+C=0$，

解之，得 $\quad C=-14$.

练习

1. 选择题：

(1) 若 $A(t, -4)$ 在曲线 $x^2-4x-2y-5=0$ 上，则 t 为（　　）；

A. 2 或 4　　B. 1　　C. 1 或 3　　D. 4

(2) 方程 $x^2-y^2=0$ 表示的图像是（　　）.

A. 两条平行直线　　B. 两条重合直线

C. 两条互相垂直的直线　　D. 一个点

2. 在方程为 $y=4x+5$ 的曲线上，横坐标是 2 的点，其纵坐标是________；纵坐标是 9 的点，其横坐标是________；曲线与 y 轴的交点坐标是________.

2. 圆的标准方程

在平面几何中，我们已经知道圆的定义，即平面内到一个定点距离等于定长的点的轨迹，其中，定点叫做圆心，定长叫做半径．

下面我们根据圆的定义，来求圆心在 $C(a, b)$，半径为 r 的圆的方程．

如图 8－18，设 $M(x, y)$ 是圆周上任意一点，则点 M 适合条件

$$|MC| = r \ (r > 0).$$

根据两点间距离公式，得

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r.$$

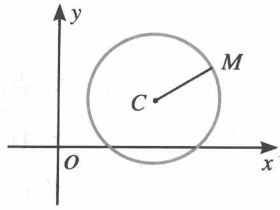


图 8－18

两边平方，得

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

这个方程就是圆心在 $C(a, b)$，半径为 r 的圆的方程，我们把它叫做**圆的标准方程**．

如果圆心在坐标原点，即 $a=0$，$b=0$，则圆的方程就是

$$x^2+y^2=r^2$$

练一练

1. (口答)说出下列各圆的圆心坐标和半径：

(1) $x^2+y^2=4$;

(2) $(x-2)^2+(y+3)^2=16$;

(3) $(x+1)^2+y^2=5$.

2. 写出下列圆的标准方程，并画出图形：

(1) 圆心在原点，半径是 5；

(2) 圆心在点 $(-1, 3)$，半径是 2；

(3) 圆心在点 $(-3, 0)$，半径是 3.

例3 已知圆心在点 $C(2, -1)$，并且这个圆过点 $A(-1, 0)$，求圆 C 的标准方程．

解：设所求圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

其中，$a=2$，$b=-1$，

根据两点间距离公式，得

$$r=|CA|=\sqrt{(-1-2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{10}.$$

将 $a=2$，$b=-1$，$r=\sqrt{10}$代入方程，得

$$(x-2)^2+(y+1)^2=10.$$

这就是所求圆 C 的标准方程.

例4 已知点 $P_1(4,\ -9)$，$P_2(6,\ 3)$，求以线段 P_1P_2 为直径的圆的标准方程,并判断点 $D(-1,\ -2)$，$E(2,\ 2)$，$F(-3,\ 4)$ 是在圆上、圆外，还是在圆内.

解：设所求圆的标准方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

根据已知，设 $C(a,\ b)$是线段 P_1P_2 的中点，因此点 C 的坐标为

$$a=\frac{4+6}{2}=5,\ b=\frac{-9+3}{2}=-3.$$

根据两点间距离公式，得圆的半径为

$$r=|CP_1|=\sqrt{(4-5)^2+(-9+3)^2}=\sqrt{37}.$$

将 $a=5$，$b=-3$，$r=\sqrt{37}$代入方程，得

$$(x-5)^2+(y+3)^2=37.$$

这就是所求的以线段 P_1P_2 为直径的圆的标准方程.

分别计算点 $D(-1,\ -2)$，$E(2,\ 2)$，$F(-3,\ 1)$与圆心 $C(5,\ -3)$ 的距离，得

$$|DC|=\sqrt{(5+1)^2+(-3+2)^2}=\sqrt{37};$$

$$|EC|=\sqrt{(5-2)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{34}<\sqrt{37};$$

$$|FC|=\sqrt{(5+3)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{80}>\sqrt{37}.$$

所以，点 D 在圆上，点 E 在圆内，点 F 在圆外.

练习

1. 已知圆心在点 $C(8,\ -3)$，并且这个圆过点 $A(5,\ 1)$，求圆 C 的标准方程.
2. 已知 $P_1(2,\ 5)$，$P_2(8,\ 3)$，求以线段 P_1P_2 为直径的圆的标准方程.
3. 判断下列各点与圆$(x+2)^2+(y-3)^2=9$ 的位置关系：

   (1) $A(-5,\ 3)$；　　(2) $B(3,\ -5)$；

   (3) $C(-1,\ 2)$；　　(4) $D(0,\ 0)$.

3. 圆的一般方程

将圆的标准方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

展开，得

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0.$$

设 $D=-2a$，$E=-2b$，$F=a^2+b^2-r^2$，可见任何一个圆的方程都可以化为如下形式：

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

由题设知，$a=-\dfrac{D}{2}$，$b=-\dfrac{E}{2}$，将 a，b 代入 $F=a^2+b^2-r^2$，得

$$r^2=\frac{1}{4}(D^2+E^2-4F).$$

因为 $r>0$，所以必须有 $D^2+E^2-4F>0$.

因此，当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 叫做**圆的一般方程**. 其中，圆心坐标是$\left(-\dfrac{D}{2},\ -\dfrac{E}{2}\right)$，半径是$\dfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

对比二元二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，圆的一般方程的特点是：

（1）x^2 和 y^2 的系数相同，且不等于0；

（2）不含 xy 项.

圆的标准方程的特点是圆心坐标和半径在方程中显而易见. 而圆的一般方程，从方程的形式上看，较标准方程简练.

解题中，有时需要将圆的标准方程与一般方程进行互化.

把标准方程化为一般方程时，只需将标准方程展开整理即可；把一般方程化为标准方程时，则需要用配方法或代入法，得到一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 配方后的公式：

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}.$$

例5 将圆的方程 $4x^2+4y^2-12x+16y+9=0$ 化成标准方程.

解： 将原方程化为

$$x^2+y^2-3x+4y+\frac{9}{4}=0,$$

配方，得

$$x^2-3x+\frac{9}{4}+y^2+4y+4=4,$$

整理，得

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=4.$$

练一练

（1）将圆$(x+3)^2+(y-4)^2=9$的方程化为一般式；

（2）求圆$x^2+y^2+6x-4y-12=0$的圆心坐标和半径．

例6 求与圆$x^2+y^2+6x-8y-11=0$圆心相同，且过点$A(-3,\ 7)$的圆的标准方程．

解： 将已知圆的方程$x^2+y^2+6x-8y-11=0$配方，得

$$x^2+6x+9+y^2-8y+16=36,$$

整理，得

$$(x+3)^2+(y-4)^2=36.$$

可知其圆心坐标为$C(-3,\ 4)$．

根据题意，所求的圆过点$A(-3,\ 7)$，所以其半径为

$$r=|CA|=\sqrt{(-3+3)^2+(7-4)^2}=3.$$

故所求圆的标准方程为

$$(x+3)^2+(y-4)^2=9.$$

练习

1. 将下列圆的一般方程化成标准方程：
   （1）$x^2+y^2-6y=0$；
   （2）$x^2+y^2+4x-6y=0$.
2. 分别指出上题中各圆的圆心和半径．
3. 已知点$(m-2,\ 7)$在圆$x^2+y^2+6x-4y-28=0$上，求m的值．

4. 圆的方程的确定

观察圆的标准方程和圆的一般方程，就会发现，这两个方程中都含有三个常数a，b，r或D，E，F. 如果根据已知条件能把这三个常数确定，那么圆的方程就可以确定了．

例7 求过两点 $M(-1, 3)$ 和 $N(4, -2)$ 且圆心 C 在直线 $x-2y=0$ 上的圆的方程．

解： 设圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

因为 M，N 两点都在圆上，所以它们的坐标都是圆的方程的解；C 点在直线 $x-2y=0$ 上，所以它的坐标是直线方程的解，分别将它们的坐标代入圆的方程和直线方程，得到关于 a，b，r 的三元二次方程组

$$\begin{cases}(-1-a)^2+(3-b)^2=r^2,\\(4-a)^2+(-2-b)^2=r^2,\\a-2b=0.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$a=2,\ b=1,\ r=\sqrt{13}.$$

故所求圆的方程为

$$(x-2)^2+(y-1)^2=13.$$

展开整理，得

$$x^2+y^2-4x-2y-8=0.$$

> **学习小贴示**
>
> 这种求解方程中未知数的方法叫做待定系数法，在求解圆的方程的问题中我们经常会用到此法．

练一练 求过两点 $M(-1, 1)$ 和 $N(1, 3)$ 且圆心在 x 轴上的圆的方程．

例8 求过三点 $P(2, 2)$，$M(5, 3)$，$N(3, -1)$ 的圆的方程．

解： 设圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

因为 P，M，N 三点都在圆上，所以它们的坐标都是方程的解．将它们的坐标依次代入上面的方程，得到关于 D，E，F 的三元一次方程组

$$\begin{cases}2D+2E+F=-8,\\5D+3E+F=-34,\\3D-E+F=-10.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$D=-8,\ E=-2,\ F=12.$$

故所求圆的方程为

$$x^2+y^2-8x-2y+12=0.$$

试一试

对上述内容，请从以下几个方面加以总结：

（1）圆的标准方程和一般方程中各有几个待定系数？

（2）必须有几个独立的条件才能确定圆的方程？

（3）在什么条件下适合使用圆的标准方程？

（4）怎样用待定系数法求圆的方程？用待定系数法求圆的方程的基本思路是什么？

练习

1. 求过两点 $M(0, 1)$ 和 $N(2, 1)$ 且半径为 $\sqrt{5}$ 的圆的方程．

2. 求过两点 $M(-1, 1)$ 和 $N(1, 3)$ 且圆心在 y 轴上的圆的方程．

3. 求过三点 $P(1, -1)$，$M(2, 0)$，$N(1, 1)$ 的圆的方程．

习题 六

1. 选择题：

（1）在圆 $x^2+y^2-8x-2y+12=0$ 上的点的坐标是（　　）；

A. $(3, 1)$　B. $(3, -1)$　C. $(-3, 1)$　D. $(-3, -1)$

（2）半径是 5 的圆的方程是（　　）；

A. $x^2+y^2-4x-6y+8=0$　B. $x^2+y^2-4x-6y-8=0$

C. $x^2+y^2-4x-6y+12=0$　D. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

（3）下列方程中表示圆的是（　　）．

A. $x^2+2y^2-4x+2y-1=0$　B. $x^2+y^2=0$

C. $x^2+y^2-6x=0$　D. $x^2+y^2+2x-4y+8=0$

2. 将圆的标准方程化为一般方程：

（1）$(x-2)^2+(y-1)^2=13$；　（2）$(x+3)^2+(y+4)^2=3$.

3. 将圆的一般方程化为标准方程：

（1）$x^2+y^2-2x+4y-6=0$；　（2）$x^2+y^2+8x-6y=0$.

4. 已知点 $(a+3, 3a)$ 在圆 $(x-3)^2+y^2=10$ 上，求 a 的值．

5. 求圆心在 $(-1, 1)$，且过直线 $x+3y+7=0$ 与 $3x-2y-12=0$ 的交点的圆的方程．

6. 求圆心是直线 $x+3y+7=0$ 与 $3x-2y-12=0$ 的交点，且半径为 $\sqrt{3}$ 的圆的方程．

***7.** 已知三个圆两两外切，且圆心坐标分别为 $O_1(2, -1)$，$O_2(14, -6)$，$O_3(14, 4)$，求出这三个圆的半径，并写出它们的标准方程．

8.7 直线与圆的位置关系

工具箱

在平面几何中，我们已经学习过直线与圆的三种不同位置关系及判断它们的方法.

已知圆的半径为 r，设圆心 C 到直线 l 的距离为 d，如图 8－19 所示，

(1) 直线与圆有两个公共点时，称直线与圆相交，并有

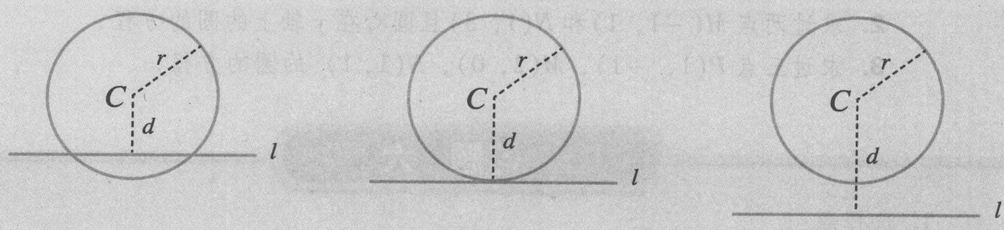
$$d<r \Leftrightarrow \text{直线 } l \text{ 与圆 } C \text{ 相交；}$$

(2) 直线与圆有唯一公共点时，称直线与圆相切，并有

$$d=r \Leftrightarrow \text{直线 } l \text{ 与圆 } C \text{ 相切；}$$

(3) 直线与圆没有公共点时，称直线与圆相离，并有

$$d>r \Leftrightarrow \text{直线 } l \text{ 与圆 } C \text{ 相离.}$$



(1)　　(2)　　(3)

图 8－19

下面我们可以利用圆心到直线的距离来判定直线与圆的位置关系.

例1 判定直线 l：$3x-4y-1=0$ 与圆 C：$(x-1)^2+(y+2)^2=9$ 的位置关系.

解：根据圆 C 的方程 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$，我们知道，圆的半径 $r=3$，圆心为 $C(1,\ -2)$，则圆心到直线 $3x-4y-1=0$ 的距离为

$$d=\frac{|3-(-8)-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2.$$

显然，有

$$2<3,$$

即　$$d<r.$$

故直线 l：$3x-4y-1=0$ 与圆 C：$(x-1)^2+(y+2)^2=9$ 相交.

由于利用直线与圆的公共点的个数就可以判定直线与圆的位置关系，而公共点的个数又可以通过直线与圆的方程组成的方程组的解的个数来确定，因此，我们还可以得到判定直线与圆的位置关系的另一个方法：利用一元二次方程的判别式来确定方程组解的个数，从而确定直线与圆的公共

点的个数.

设直线方程为 $Ax+By+C=0$(A, B 不全为0),圆 C 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$($D^2+E^2-4F>0$),方程组 $\begin{cases}Ax+By+C=0\\x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\end{cases}$ 经消元后得到一元二次方程,设判别式为 Δ,则有:

$\Delta>0\Leftrightarrow$ 直线 l 与圆 C 相交;

$\Delta=0\Leftrightarrow$ 直线 l 与圆 C 相切;

$\Delta<0\Leftrightarrow$ 直线 l 与圆 C 相离.

工具箱

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$($a\neq0$)的判别式为 $\Delta=b^2-4ac$,

若 $\Delta>0$,则方程有两个不等的实根;

若 $\Delta=0$,则方程有两个相等的实根;

若 $\Delta<0$,则方程没有实根.

例2 判定直线 l:$3x+4y-25=0$ 与圆 C:$x^2+y^2=25$ 的位置关系.

解: 由直线与圆的方程组成的方程组为

$$\begin{cases}3x+4y-25=0,\\x^2+y^2=25.\end{cases}$$

由直线方程得 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$,代入圆的方程,得

$$x^2+\left(-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}\right)^2=25,$$

整理,得

$$x^2-6x+9=0.$$

$\because \Delta=(-6)^2-4\times1\times9=0$,

$\therefore$ 直线 l 与圆 C 相切.

练习

1. 填空题：

(1) 点 $A(2, -1)$ 到直线 $4x-3y-6=0$ 的距离是________；

(2) 圆 $x^2+y^2+6x+4y+2=0$ 的圆心到直线 $3x+2y=0$ 的距离是________.

2. 选择题：

(1) 直线 l：$x+y=\sqrt{2}$ 与圆 C：$x^2+y^2=1$ 的位置关系是（　　）；

A. 相切　　B. 相离　　C. 相交且过圆心　　D. 相交但不过圆心

(2) 直线 l：$2x-y-5=0$ 与圆 C：$x^2+y^2-4x+2y+2=0$ 的位置关系是（　　）.

A. 相切　　B. 相离　　C. 相交且过圆心　　D. 相交但不过圆心

3. 判断直线 $2x-3y-6=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 的位置关系.

例3 求过点 $A(\sqrt{2}, 0)$ 的圆 $x^2+y^2=1$ 的切线方程.

解：设切线方程为 $y=k(x-\sqrt{2})$，

即　　$kx-y-\sqrt{2}k=0$.

因为直线 $kx-y-\sqrt{2}k$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，

所以　　$d=r$，

即　　$$\frac{|k\cdot 0-0-\sqrt{2}\cdot k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=1.$$

解之，得　$k=\pm 1$.

故所求切线方程为 $y=x-\sqrt{2}$ 或 $y=-x+\sqrt{2}$.

> **学习小贴示**
>
> 若直线与圆相切，则称直线为圆的切线.

例4 已知圆的方程是 $x^2+y^2=2$，当 b 为何值时，直线 $y=x+b$ 与圆相交，相切，相离？

解：解方程组

$$\begin{cases} y=x+b, \\ x^2+y^2=2, \end{cases}$$

将一次方程代入二次方程，得

$$x^2+(x+b)^2=2,$$

整理，得

$$2x^2+2bx+b^2-2=0.$$

这个方程的判别式是

$$\begin{aligned}\Delta &= (2b)^2 - 4\times2\times(b^2-2)\\ &= -4(b+2)(b-2).\end{aligned}$$

故　当 $-2<b<2$ 时，$\Delta>0$，直线与圆相交；

当 $b=\pm2$ 时，$\Delta=0$，直线与圆相切；

当 $b>2$ 或 $b<-2$ 时，直线与圆相离．

练习

1. 求过原点且与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 相切的直线方程．
2. 求过点 $(-1, 2)$ 且与圆 $x^2+y^2=5$ 相切的直线方程．
3. k 为何值时，直线 $y=kx+1$ 与圆 $(x-1)^2+y^2=2$ 相切？

习题 七

1. 圆 $x^2+y^2=13$ 与直线 $x-y=1$ 是否相交？如果相交，求出交点坐标．
2. m 为何值时，直线 $x-y-m=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交，相切，相离？
3. 求圆心在原点，且与直线 $x+y=2$ 相切的圆的方程．
4. 求过点 $(7, 1)$ 且与圆 $x^2+y^2=50$ 相切的直线方程．
5. 已知圆的方程是 $x^2+y^2-2x+4y=0$，当 k 为何值时，直线 $y=kx+4$ 与圆相交，相切，相离？

*6. 直线 $3x-4y-1=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 相交于 A，B 两点，求 AB 的长．

8.8 直线与圆的方程的简单应用

例1 已知某产品在市场上的供应数量 Q 与销售价格 P 之间的关系为 $P-3Q-5=0$，需求数量 Q 与价格 P 之间的关系为 $P+2Q-25=0$，P、Q 的单位分别是"万件"和"元/件"．试求市场的供需平衡点．

分析： 产品的销售价格关系到利润大小，会影响到供应量；销售价格又关系到购买者承受能力，会影响到需求数量．供需平衡是一种市场规律，若能事先估计价格与供应量、需求量之间的关系，就能应用数学知识预测平衡点．一个合理的销售价格 P 以及使供需相等的产品数量 Q 确定的点(P,Q)就是供需平衡点．也就是说，坐标(P,Q)既要满足供应关系，又要满足需求关系．

解： 由已知条件可知，供应关系和需求关系分别为

$$P-3Q-5=0,\ P+2Q-25=0.$$

它们的图像都是直线．我们以数量为横轴，价格为纵轴，分别作出供应线和需求线，如图 8－20 所示．从图中可以看出，供应量随价格的升高而增加，需求量随价格的升高而减少．供应线与需求线的交点坐标，就是供需平衡时的数量与价格．

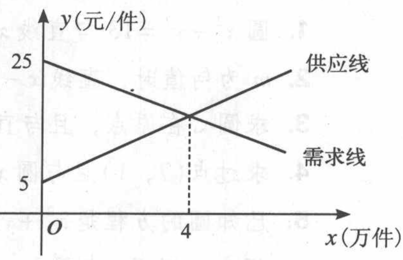


图 8－20

解方程组

$$\begin{cases}P-3Q-5=0\\P+2Q-25=0\end{cases}$$

得 $P=17$，$Q=4$.

所以，当销售价格为 17 元/件时，供应量与需求量相等，达到平衡，均为 4 万件．

例2 如图 8－21 是某圆拱桥的一孔圆拱示意图，该圆拱的跨度 $AB=20$ 米，拱高 $OP=4$ 米，在建造时，每隔 4 米需要一个支柱支撑，求支柱 A_2P_2 的长度．（精确到 0.01 米）

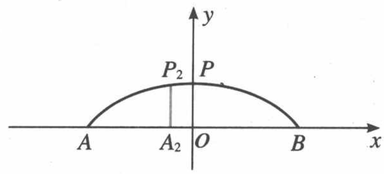


图 8－21

解： 如图建立直角坐标系，因为 $AB=20$ 米，$OP=4$ 米，所以点 A，B，P 的坐标分别是$(-10,0)$，$(10,0)$，$(0,4)$．

设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

由于 A，B，P 三点在圆上，所以它们的坐标满足圆的方程．

于是，得到方程组

$$\begin{cases}100-10D+F=0,\\ 100+10D+F=0,\\ 16+4E+F=0.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$D=0,\ E=21,\ F=-100.$$

由此得到圆的方程为

$$x^2+y^2+21y-100=0.$$

由于每隔4米需要一个支柱支撑，则可算得 A_2P_2 位置处的支柱，其横坐标为 $x=-2$.

将 $x=-2$ 代入这个圆的方程，得

$$y^2+21y-96=0,$$

解得　$y\approx3.86$(米).

答：支柱 A_2P_2 的长度约为3.86米.

练习

一根弹簧，挂4kg的物体时，长20cm，在弹性限度内，所挂物体的质量每增加1kg，弹簧伸长1.5cm. 写出弹簧的长度 l(cm)与所挂物体质量 F(kg)之间关系的方程.

习题 八

一辆货车要通过跨度为10米，拱高为4米的半圆形隧道(隧道正中通过)，为保证安全，车顶离隧道顶部至少应有0.5米的距离，如果货车宽为1.6米，则货车的限高为多少？(精确到0.01米)

归纳与总结

1. 知识要点

(1) 已知 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，则 $|P_1P_2|=$________.

(2) 已知 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，且 $P(x, y)$ 是线段 P_1P_2 的中点，则 $x=$________，$y=$________.

(3) 直线倾斜角 α 的取值范围是________；若已知 α 且 $\alpha\neq 90°$，则斜率 $k=$________；若已知两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则斜率 $k_{AB}=$________.

(4) 直线的点斜式方程是________；直线的斜截式方程是________；直线的一般式方程是________.

(5) 求两条直线的交点坐标就是________.

(6) 两条直线 l_1 与 l_2 斜率存在且不重合时，$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow$________.

(7) 两条直线 l_1 与 l_2 斜率存在时，$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow$________.

(8) 点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离 $d=$________.

(9) 一般地，如果某曲线 C 上的点与一个二元方程 $f(x, y)=0$ 的解具有如下的对应关系：

①________；

②________.

那么，这个方程叫做曲线的方程；这条曲线叫做方程的曲线.

(10) 圆的标准方程是________，其圆心坐标是________，半径是________.

(11) 圆的一般方程是________（________>0），其圆心坐标是________，半径是________.

(12) 直线与圆的三种位置关系是________，________，________.

(13) 利用圆心到直线的距离与半径大小的关系判断直线与圆的位置关系的方法是：

若 $d<r$，则直线与圆________；

若 $d=r$，则直线与圆________；

若 $d>r$，则直线与圆________.

(14) 利用一元二次方程的判别式与零的大小关系判断直线与圆的位置关系的方法是：

若 $\Delta>0$，则直线与圆________；

若 $\Delta=0$，则直线与圆________；

若 $\Delta<0$，则直线与圆________.

2. 重点与难点

本单元教材的重点是直线方程与圆的方程的概念、求解与应用．

本单元教材的难点是根据已知条件求出直线方程与圆的方程．

点斜式、斜截式、一般式是直线方程的三种重要形式，斜率这个概念在其中扮演着重要角色，理解和掌握斜率的概念是理解和掌握直线方程的关键．

圆心确定圆的位置，半径确定圆的大小，圆心的坐标，半径的大小就是确定圆的方程的重要数据．

待定系数法是求曲线方程的重要方法．

例1 求过点 $A(2,\ -1)$，且倾斜角是直线 l：$\sqrt{3}x-y+1=0$ 的倾斜角的二倍的直线方程．

解：把直线 l：$\sqrt{3}x-y+1=0$ 化成斜截式，得

$$y=\sqrt{3}x+1,$$

则它的斜率 $k_1=\sqrt{3}$，即其倾斜角 $\alpha_1=\frac{\pi}{3}$，

所以，所求直线的倾斜角为 $\alpha_2=\frac{2\pi}{3}$，其斜率为

$$k_2=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}.$$

于是，所求直线方程为

$$y-(-1)=-\sqrt{3}(x-2),$$

即 $\sqrt{3}x+y+1-2\sqrt{3}=0.$

例2 求过点 $(2,\ 3)$，且平行于直线 $2x+y-5=0$ 的直线方程．

解法1：因为直线 $2x+y-5=0$ 的斜率是 -2，而所求的直线与已知直线平行，所以它的斜率也是 -2.

根据直线方程的点斜式，所求直线方程为

$$y-3=-2(x-2),$$

即 $2x+y-7=0.$

解法2：用待定系数法．

已知所求直线与直线 $2x+y-5=0$ 平行，斜率都是 -2，所以，设所求直线方程为 $2x+y+C=0$.

因为 $(2,\ 3)$ 是所求直线上的一点，将 $(2,\ 3)$ 代入方程 $2x+y+C=0$，

得 $2\times2+3+C=0,$

所以 $C=-7.$

故所求直线方程为 $2x+y-7=0.$

例3 过原点 O 作圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 的切线．

求：(1) 原点与切线切点之间的距离；

(2) 切线的方程．

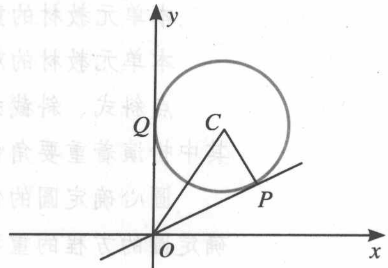


图 8－22

解：如图 8－22，点 C 是圆 C 的圆心，P，Q 是切点．

由圆 C 的方程 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$，知其圆心为 $(1,2)$，半径为 1.

所以，

$$|CO|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},$$

$$|CP|=r=1,$$

于是，$|OP|=\sqrt{|CO|^2-|CP|^2}=\sqrt{5-1}=2$，

即原点与切线切点之间的距离为 2．

(2) 设求切线方程为 $y=kx$，

则有方程组

$$\begin{cases} y=kx, \\ (x-1)^2+(y-2)^2=1, \end{cases}$$

将一次方程代入二次方程，得

$$(x-1)^2+(kx-2)^2=1,$$

整理，得

$$(k^2+1)x^2-2(2k+1)x+4=0,$$

其中，$\Delta=[-2(2k+1)]^2-4\times(k^2+1)\times4=0$，

解得 $k=\dfrac{3}{4}$，

即所求切线方程为 $y=\dfrac{3}{4}x$.

另外，由于方程组

$$\begin{cases} x=0, \\ (x-1)^2+(y-2)^2=1, \end{cases}$$

也只有一个解，所以 $x=0$ 也是圆 C 的切线方程．

故所求圆的切线有两条，即 $y=\dfrac{3}{4}x$ 和 $x=0$.

综合练习 八

A 组

1. 选择题：

(1) 直线 $x+\sqrt{3}y-1=0$ 的倾斜角是（　　）；

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $-\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

(2) 已知曲线 $kx=y^2+4k$ 经过点 $A(2, 1)$，则 k 的值为（　　）；

A. 2　　B. -2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

(3) 直线 $6x+2y+5=0$ 与 $y=-3x+1$ 的位置关系是（　　）；

A. 垂直　　B. 重合　　C. 平行　　D. 相交而不垂直

(4) 圆 $x^2+y^2-4x+6y+8=0$ 的圆心和半径分别是（　　）.

A. $(2, -3)$，5　　B. $(-2, 3)$，5

C. $(2, -3)$，$\sqrt{5}$　　D. $(-2, 3)$，$\sqrt{5}$

2. 填空题：

(1) 点 $A(2, -1)$ 与点 $B(5, 3)$ 的距离是________；

(2) 点 $A(2, -1)$ 与点 $B(5, 3)$ 的中点坐标是________；

(3) 直线 $3x+4y-12=0$ 的斜率是________，在 y 轴上的截距是________；

(4) 圆 $x^2+y^2-6x+12y-4=0$ 的圆心坐标是________，半径是________.

3. 已知点 $A(-2, 1)$ 和点 $B(3, 4)$，求直线 AB 的方程.

4. 求过原点且平行于直线 $3x-4y+5=0$ 的直线方程.

5. 求过原点且垂直于直线 $3x-4y+5=0$ 的直线方程.

6. 求以 $C(1, -2)$ 为圆心，且与直线 $3x-4y+9=0$ 相切的圆的方程.

7. 求经过点 $(2, -1)$，且与圆 $x^2+y^2-2x+10y-10=0$ 同心的圆的方程.

8. 直线 $x-2y+2=0$ 与曲线 $x^2+4y^2=4$ 相交于 A，B 两点，求 A，B 两点的距离.

B 组

1. 选择题：

(1) 直线 $bx+cy=1(b\neq 0)$ 与 x 轴交点的坐标是（　　）；

A. $(\frac{1}{b}, 0)$　　B. $(b, 0)$

C. $\left(\frac{1}{|b|}, 0\right)$　　　　　D. $(|b|, 0)$

(2) 直线 $ax+2y-3=0$ 与直线 $x+y+5=0$ 垂直，则 $a=$(　　)；

A. 1　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{2}{3}$　　D. -2

(3) 若直线 $x+y+a=0$(其中 a 为常数)经过圆 $x^2+y^2-2x+4y-6=0$ 的圆心，则 a 的值是 (　　)；

A. -2　　B. 1　　C. -1　　D. 2

(4) 已知直线 $3x+4y+2=0$ 与圆 $x^2+y^2+4y=0$ 交于 A, B 两点，则线段 AB 的垂直平分线方程是 (　　).

A. $4x-3y-6=0$　　　　B. $4x-3y-2=0$

C. $4x+3y+6=0$　　　　D. $3x+4y+8=0$

2. 填空题：

(1) 过点 $A(2, 3)$, $B(5, 9)$ 的直线交 x 轴于点 P，则 P 的坐标是 ________；

(2) 连结 $A(5, y)$ 和 $B(x, 7)$ 的线段中点是 $P(-5, -9)$，则 $|AB|=$ ________；

(3) 若方程 $x^2+y^2-x+y+k=0$ 表示圆，则 k 的取值范围是________.

3. 过点 $A(-1, a)$ 和 $B(a, 6)$ 的直线与直线 $x-2y+1=0$ 垂直，求 a 的值.

4. 已知 $A(-3, -5)$, $B(1, -2)$, $O(0, 0)$.

(1) 求线段 AB 的长；

(2) 求直线 AB 的方程；

(3) 求点 O 到直线 AB 的距离；

(4) 求$\triangle ABO$ 的面积.

5. 已知等腰直角三角形的两个顶点是 $A(2, 0)$ 和 $B(0, 4)$，求直角顶点 C 的坐标.

6. 求以直线 $3x-4y+12=0$ 在坐标轴间所截的线段为直径的圆的方程.

7. 求过点 $A(5, -1,)$ 和 $B(0, 4)$，且圆心在直线 $2x-7y+8=0$ 上的圆的方程.

8. 一艘轮船在沿着直线返回港口的途中，接到指挥塔的警告：暗礁区中心位于轮船正西 70 千米处，范围是半径长为 30 千米的圆形区域. 已知港口位于暗礁区中心正北 40 千米处，如果这艘轮船不改变航线，它是否会受到暗礁的影响?

阅读空间

笛卡儿

——解析几何的创始人

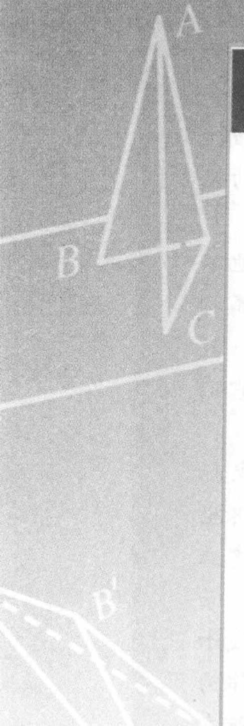
笛卡儿(R. Descartes，1596—1650)出生在法国土伦，他自幼喜欢哲学、数学和生物学．笛卡儿青年时代就具有远见，并有许多新奇思想．笛卡儿的兴趣是多方面的，他善于思考和学习，抓紧时间博览群书，搜集各种资料．他不仅重视向书本学习，而且向社会学习，向实际学习．他在回忆录中写道：“从我的贪婪的学习中，只得到一个益处——能够越来越深刻地发现我的无知”．

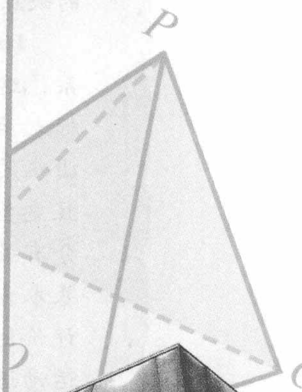
笛卡儿是一个敢于向传统数学挑战，勇于开拓新的数学领域的人．他不满意传统几何学，认为它过于强调证明技巧，过分依赖图形，不利于提高人们的想象力．他也不满意代数学，认为代数学完全受法则和公式的约束，影响了人们思维的灵活性．他表示要建立包括这两门学科的优点，而没有它们的缺点的新学说．这就是我们所学的解析几何．

1637 年，笛卡儿出版了《几何学》一书，他引入了平面直角坐标系，这个坐标系也叫笛卡儿平面直角坐标系．在坐标系中，他不仅用坐标表示点的位置，而且将坐标通过“点动成线”的观点具体地用到建立曲线的方程上．对方程他不仅把它看成是未知数和已知数的关系式，而且更多地把它看成两个变量 x 和 y 之间的关系式．这正是处理几何曲线十分有效的新方法的思想基础．笛卡儿在《几何学》中，以“解析”作为基本方法，即把对几何图形的研究转化为对代数方程的研究．恩格斯在评价他的这一思想时说：“数学中的转折点是笛卡儿的变数．有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要了．”变量进入数学，引起了数学的深刻革命，有力地解决了生产和科学技术中的许多重大问题和亟待解决的问题，这在数学史上是具有划时代意义的．

笛卡儿创立了解析几何学，他的贡献是伟大的，他的思想方法是划时代的．在他之后各国数学家的研究使解析几何日趋完善，但是他作为解析几何学创始人的地位却是不可动摇的．他的这些成就，为后来牛顿、莱布尼兹发现微积分，为一大批数学家的新发现开辟了道路．

第九单元　立体几何

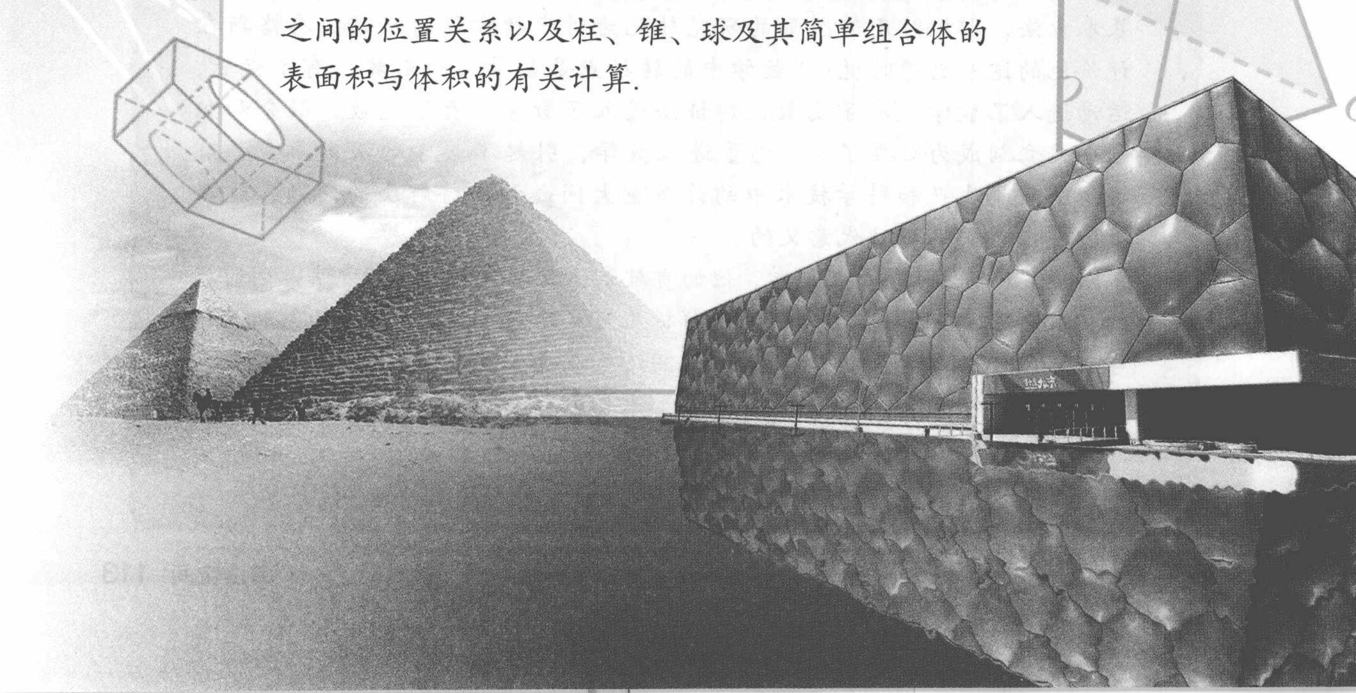




回顾与思考

在平面几何中,我们研究的是在同一个平面内的图形的基本性质及这些性质的应用，比如三角形、正方形、圆等.在我们周围的世界中，遇到更多的却是空间物体，例如我们从2008年北京奥运会游泳比赛的场馆——国家游泳中心抽象出来的长方体，从罐头筒抽象出来的圆柱体，从篮球抽象出来的球体等.我们把这种由空间中的点、线、面组成的图形，叫做空间图形（或立体图形）.显然，平面图形只是空间图形的一部分.

在这一单元，我们将学习空间图形的基础知识，包括平面和它的性质，空间中点、直线、平面之间的位置关系以及柱、锥、球及其简单组合体的表面积与体积的有关计算.



9.1 平面的基本性质

引例

生活中常见的物体，如图 9－1 中桌面、黑板面、平静的湖面等等，都会给以我们“平面”的直观形象．

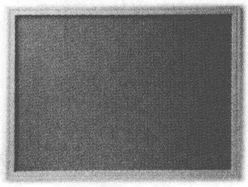


图 9－1

1. 平面及其表示

几何里所说的“平面”就是从这样一些物体中抽象出来的．但这些物体都是平面的局部形象，几何中的平面是无限延展而没有边界的．

工具箱

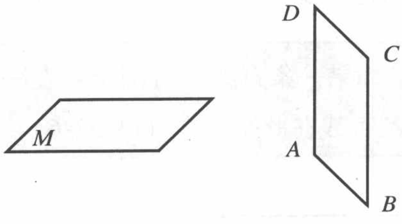
将线段向两端无限延伸就形成了**直线**．

想一想　初中是怎样认识直线的？

我们不能把一个无限延展的平面在纸上表示出来，通常用平行四边形表示平面，如图 9－2，不过要把它想象成无限延展的．

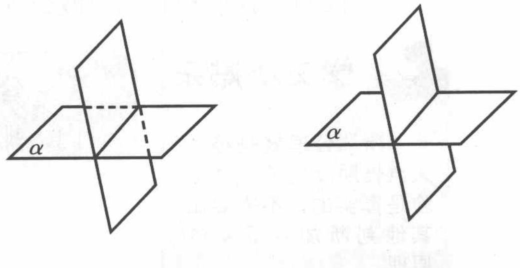
当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮住部分的线段画成虚线或不画，以增强图形的立体感，如图 9－3．

一个平面常用一个大写拉丁字母来表示，如平面 M（图 9－2（1）），或用一个小写希腊字母来表示，如平面 α（图 9－3），也可以用表示平面的平行四边形顶点的字母来表示，如平面 $ABCD$ 或平面 AC（图 9－2（2））．



（1）　（2）

图 9－2



（1）　（2）

图 9－3

练一练

观察图 9-4 中的两个图形，用模型来说明它们的位置有什么不同，并用字母来表示各平面．

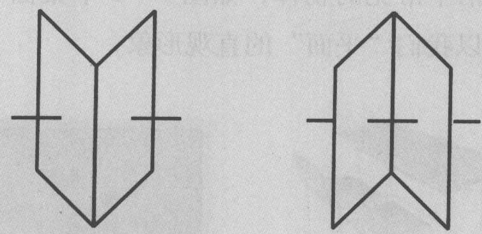


图 9-4

做一做

用两块硬纸片，如图 9-5，在虚线处剪开、交叉，制作出相交平面的模型，自己演示一下相交平面在空间中的不同放法．

根据观察结果，在纸上画出几种相交平面的不同放法．

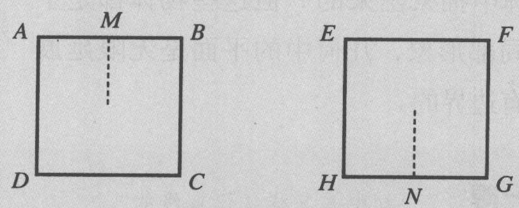


图 9-5

2. 平面的基本性质

在日常生活中，我们对平面已经有了一些直观印象，例如，我们知道什么样的物体表面是“平的”，但要了解平面的有关知识，只靠直观印象是不行的，还需要进一步的学习．

在社会实践中，人们经过长期的观察与总结，得出了关于平面的三个性质．我们把它们叫做公理，作为进一步推证空间图形其他性质的基础．

学习小贴示

所谓**公理**就是经过人类长期反复的实践检验是真实的，不需要由其他判断加以证明的原理．

公理 1 如果一条直线上有两个点在一个平面内，那么这条直线在此平面内（图 9-6）．

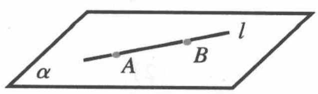


图 9-6

这时，我们称**直线在平面内**，或者说**平面经过直线**.

这个公理是判定直线是否在平面内的依据，同时又可以作为检验一个面是否“平”的标准.

学习小贴示

生活经验集锦

(1) 买木制尺时，为了检验尺子是否直，可以把尺子的直边放在很平的玻璃面上，观察尺边与玻璃面之间有没空隙，就可以知道尺子是否直了；

(2) 木工为了检验刨过的木板是否已经“平”，把角尺放在木板上，并且任意移动角尺的位置，观察尺边与木板之间是否处处密合，就可以判断木板是不是已经刨平了.

想一想 你能说出这是什么道理吗?

直线和平面都可以看做是点的集合，因此，我们可以用集合的符号表示点、线、面之间的相互关系. 例如，点 A 在直线 l 上，记做 $A\in l$；直线 l 外的一点 P，记做 $P\notin l$；点 B 在平面 α 内，记做 $B\in\alpha$；而 $l\subset\alpha$，则表示直线 l 在平面 α 内，否则，就说直线 l 在平面 α 外，记做 $l\not\subset\alpha$.

公理2 如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线（图9－7）.

这个公理揭示了两个平面相交的重要特征：如果两个平面相交，它们必相交成一条直线.

例如，教室里相邻的两面墙，其相交处是一条直线. 又如把一张长方形的纸对折起来，再张开一角度，其折痕是一条直线.

反之，如果两个平面有唯一一条公共直线，就是说这两个平面相交，交线就是它们的公共直线.

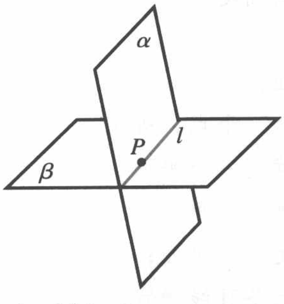


图9－7

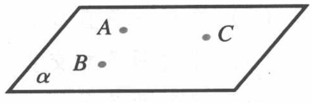


图9－8

如图9－7，平面α与平面β相交，交线为l，记做$\alpha \cap \beta = l$.

公理3 过不在一条直线上的三个点，有且只有一个平面（图9－8）.

这个公理可以简单地说成“**不共线的三点确定一个平面**”. 这里所谓“确定”是指经过这三个点的平面“存在”而且“唯一”.

想一想

1. 三脚架为什么可以稳固地支撑照相机?
2. 为什么一扇门用两个合叶和一把锁就可以固定在唯一的位置上了?
3. 自行车为什么能稳定地停在地面上?

过不在一条直线上的三点A，B，C的平面，可记做“平面ABC”.

议一议 你还能举出几个“不共线的三点确定一个平面”的生活实例吗?

练习

1. 填空:

(1) 若一条直线上有________点在平面内，则这条直线在平面内;

(2) 有一个公共点的两个不重合的平面交于________直线;

(3) ________________三点确定一个平面.

2. 判断正误:

(1) 经过三点确定一个平面; ( )

(2) 经过一条直线和直线外一个点，确定一个平面; ( )

(3) 经过两条相交直线，确定一个平面; ( )

(4) 经过两条平行直线，确定一个平面; ( )

(5) 四边形的四个顶点确定一个平面; ( )

(6) 两两相交且不共点的三条直线确定一个平面. ( )

3. 画出满足条件的图形：

(1) 点 A 在平面 α 内，但点 B 在平面 α 外；

(2) 直线 l 经过平面 α 外一点 M，并且与平面 α 相交于点 N；

(3) 直线 l 在平面 α 内，又在平面 β 内，即平面 α 与平面 β 相交于直线 l.

习题 一

1. 画出符合下列条件的图形：

(1) 直线 a 与 b 经过属于平面 M 的点 B，且 a 不在平面 M 内，b 在平面 M 内；

(2) 平面 M 与平面 N 相交于直线 a，点 A 在直线 a 上，直线 b 在平面 N 内，且直线 b 与平面 M 相交于点 A.

2. 口答：

(1) 空间的三条直线相交于一点，最多能确定几个平面？相交于三个点呢？

(2) 过一点可以作多少个平面？过两个点呢？过一条直线上的三个点可以作多少个平面？

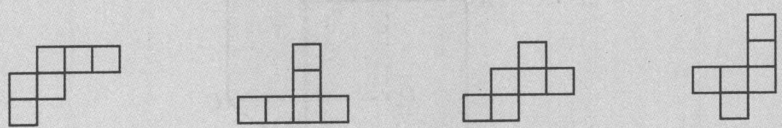
3. 判断是否存在下列语句所描述的图形：

(1) 平面 α 外的一点 A 和平面 α 内的一条直线不共面；

(2) 三条直线两两相交，但不共面；

(3) 三点 A，B，C 既在平面 α 内，又在平面 β 内.

4. 下面是四个平面图形，每个小四边形都是全等的正方形，其中可以沿两个正方形的相邻边折叠围成一个立方体的图形是（　　）.



A　　B　　C　　D

9.2 直线、平面平行的判定与性质

在同一平面内，我们知道两条直线有相交和平行两种位置关系，那么在空间中，两条直线是不是也只有这两种位置关系呢？

引例

在高速公路上，我们经常会看到如图 9－9 所示的立交桥．桥上公路与桥下公路所在的两条直线既不平行又不相交．显然，它是两条直线的一种新的位置关系．

图 9－9

1. 直线与直线

观察与思考

在图 9－10 中的正方体中，线段 $A'B'$ 所在的直线与线段 BC 所在的直线的位置关系如何？

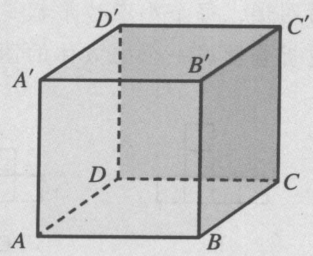


图 9－10

通过观察，我们发现：这两条直线既不相交也不平行，它们不同在任何一个平面内．

我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做**异面直线**．

这样，空间两条直线有且只有以下三种位置关系：

（1）相交直线：在同一平面内，有且只有一个公共点；

（2）平行直线：在同一平面内，没有公共点；

（3）异面直线：不同在任何一个平面内，没有公共点．

其中相交直线与平行直线又可叫做**共面直线**．

想一想 在图 9－10 的正方体中，与 $A'B'$ 构成异面直线的棱有哪几条？

画异面直线时，为了显示它们不共面的特点，通常用一个或两个平面来衬托，如图 9－11.

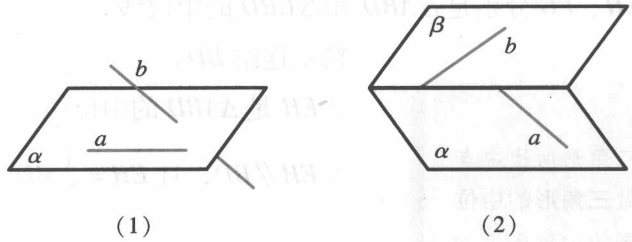


图 9－11

在平面几何中，我们学过这样一个定理：平行于同一条直线的两条直线互相平行．那么，在空间中，这个结论是否成立呢？

想一想

观察图 9－12，在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$A'B'/\!/AB$，$CD/\!/AB$，$A'B'$ 与 CD 平行吗？

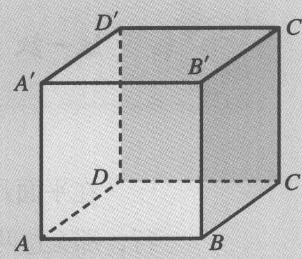


图 9－12

显然，上面的定理在空间中仍然成立，我们把它作为公理．

公理 4 平行于同一条直线的两条直线互相平行．

这个公理表明，平行于空间一条已知直线的所有直线都互相平行．它给出了判断空间两条直线平行的依据．

公理 4 表述的性质叫做**空间平行线的传递性**．

工具箱

顺次连接空间中不共面的四个点所构成的图形，叫做**空间四边形**.

例1 如图 9－13，空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点．试说

明四边形 $EFGH$ 是一个平行四边形．

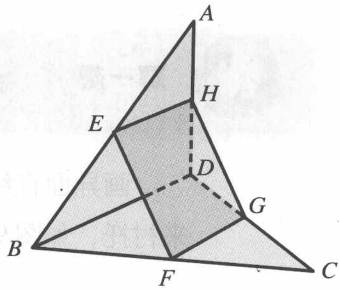


图 9－13

分析： 我们知道，一组对边平行且相等的四边形是平行四边形．因此，我们只要得到 $EH /\!/ FG$，且 $EH=FG$ 即可．因为 E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点，所以 EH、FG 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 的中位线．

工具箱

连结三角形两边中点的线段叫做**三角形的中位线**．三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半．

解： 连结 BD，

$\because EH$ 是 ΔABD 的中位线，

$\therefore EH /\!/ BD$，且 $EH=\frac{1}{2}BD$.

同理，$FG /\!/ BD$，且 $FG=\frac{1}{2}BD$.

$\therefore EH /\!/ FG$，且 $EH=FG$，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形．

议一议

在例 1 中，如果再加上条件 $AC=BD$，那么四边形 $EFGH$ 是什么图形?

在平面几何中，我们知道“如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补”．在空间中，这个结论是否仍然成立呢?

想一想

观察图 9－14，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$\angle ADC$ 与 $\angle A'D'C'$，$\angle ADC$ 与 $\angle A'B'C'$ 的两边分别对应平行，这两组角的大小关系如何?

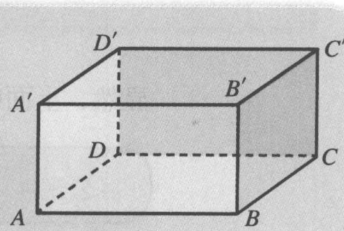


图 9－14

从图中我们很容易得到：

$\angle ADC=\angle A'D'C'$，

$\angle ADC+\angle A'B'C'=180°$.

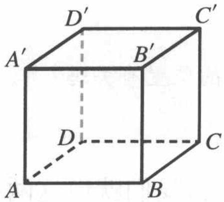
我们有以下定理：

定理　空间中如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等或者互补．

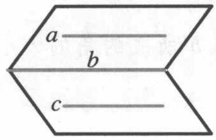
练习

1. (1) 如图，DD'是正方体$ABCD-A'B'C'D'$的一条棱，则在正方体中与DD'平行的棱共有________条；

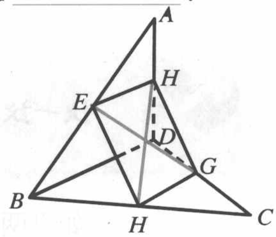
(2) 如果$BA/\!/B'A'$，$BC/\!/B'C'$，那么$\angle ABC$与$\angle A'B'C'$____________.



第 1 (1) 题



第 2 题



第 3 题

2. 如图，在一张长方形纸上依次画三条平行线a，b和c，以中间一条b为折痕，把纸折过来，观察在空间中a是否与c平行，为什么？

3. 如图，在空间四边形中，连接不相邻两边中点的两条线段是否相交且互相平分？

2. 直线与直线所成的角

> **工具箱**
>
> 平面内的两条直线相交成4个角，我们把其中不大于90°的角称为它们的夹角.

在初中，我们学习了平面内两条直线的夹角的概念，它刻画了一条直线相对于另一条直线的倾斜程度.

在空间中，两条异面直线之间的倾斜程度又该怎样刻画呢？

为此，我们引入“两条异面直线所成的角”这一概念.

如图 9－15 (1)、(2)，已知两条异面直线a，b经过空间任意一点O作直线$a'/\!/a$，$b'/\!/b$，我们把a'与b'所成的锐角（或直角）叫做**两条异面直线a与b所成的角**.

为了简便，我们经常将点O取在两条异面直线中的一条上（图 9－15 (3)）.

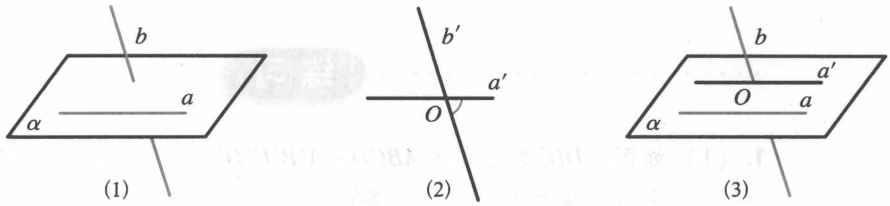


图 9－15

议一议　a'与b'所成的角的大小与点 O 的位置有关吗？

如果两条异面直线所成的角是直角，那么我们就说这两条**异面直线互相垂直**，记做 $a \perp b$.

显然，两条异面直线所成的角 θ 的变化范围是 $0° < \theta \leq 90°$.

想一想　两条异面直线所成的角为什么不可能等于0°？

练习

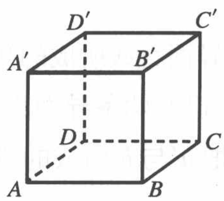
1. 填空题：

如图，在棱长为 1 的正方体中，

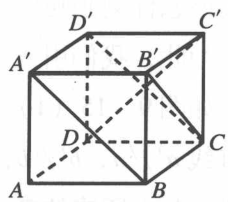
(1) BB'与 CD 是________直线，它们所成的角是________度；

(2) $A'B'$与 CD 是________直线，它们所成的角是________度；

(3) BC'与 AC 是________直线，它们所成的角是________度.



第 1 题



第 2 题

2. 如图，在正方体中，$A'B$ 与 $D'C$，$C'D$，$B'C$ 所成的角分别是多少度？

3. 直线与平面

观察与思考

图 9－16 的长方体中，线段 BB' 所在的直线与长方体的六个面所在的平面有几种位置关系？

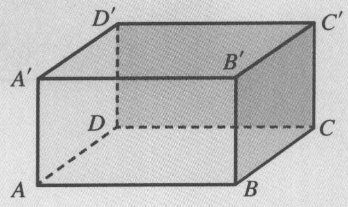


图 9－16

通过观察，我们可以发现直线与平面的位置关系有以下三种：

(1) **直线在平面内**：这时直线与平面有无数个公共点，如 $B'B$ 直线在平面 $BCC'B'$ 内，也在平面 $A'ABB'$ 内；

(2) **直线与平面相交**：这时直线与平面有且只有一个公共点，如直线 $B'B$ 与平面 $ABCD$ 相交于点 B，与平面 $A'B'C'D'$ 相交于点 B'；

(3) **直线与平面平行**：这时直线与平面没有公共点，如直线 $B'B$ 与平面 $ADD'A'$ 平行，也与平面 $DCC'D'$ 平行．

其中，直线与平面相交或平行统称为**直线在平面外**．

直线与平面的三种位置关系如图 9－17 所示，其中直线 a 与平面 α 相交于点 A，记做 $a\cap\alpha=A$；直线 a 与平面 α 平行，记做 $a/\!/\alpha$.

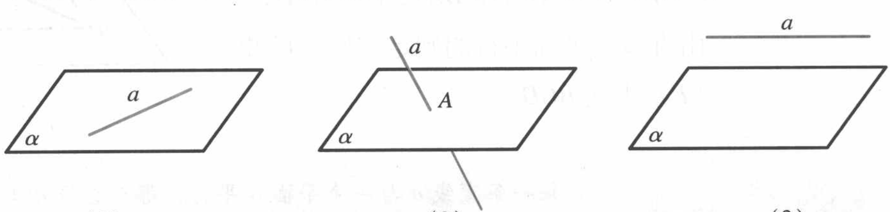


图 9－17

试一试　请你在教室中找出直线与平面的三种位置关系的具体例子．

直线与平面的三种位置关系中，平行是一种很重要的关系，它在实际生活中的应用非常广泛．

怎样判定直线与平面平行呢？

观察教室中的门，显然门扇的两边是平行的．在门扇绕着一边转动的过程中，另一边始终与门框所在的平面没有交点，即给人一种平行的印象．

一般地，我们有下面的直线与平面平行的**判定定理**（图 9－18）：

> 如果平面外的一条直线与平面内的一条直线平行，那么这条直线与这个平面平行．

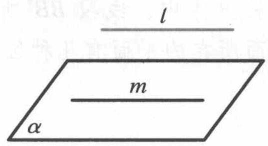


图 9－18

判定定理告诉我们，对于直线与平面平行这样的空间问题，可以转化为直线与直线间平行这样的平面问题来解决.

例2 如图 9－19，已知空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，AD 的中点．根据判定定理说明：$EF /\!/$ 平面 BCD.

分析：根据直线与平面平行的判定定理可知，要判定 $EF /\!/$ 平面 BCD，只要证明 EF 与平面 BCD 内的一条直线平行即可．而 EF 是 ΔABD 的中位线，所以 $EF /\!/ BD$.

解：连结 BD，

$\because AE = EB$，$AF = FD$，

$\therefore EF /\!/ BD$.

$\because EF \not\subset$ 平面 BCD，$BD \subset$ 平面 BCD，

由直线与平面平行的判定定理，可知

$EF /\!/$ 平面 BCD.

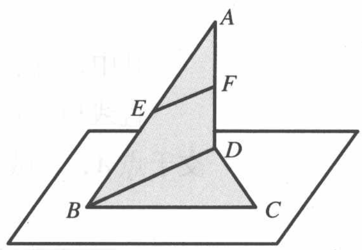


图 9－19

议一议 如果一条直线 a 与一个平面 α 平行，那么直线 a 与平面 α 内的直线有怎样的位置关系？

由于直线 a 与平面 α 平行，所以直线 a 与平面 α 没有公共点．这样，平面 α 内的直线与平面 α 外的直线 a 只能是平行直线或者是异面直线．

在什么条件下，平面 α 内的直线与直线 a 平行呢？我们可以得到直线与平面平行具有如下的**性质定理**：

> 如果一条直线与一个平面平行，并且经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行．

这个性质定理揭示了直线与平面平行中蕴含着直线与直线平行，因此它给出了一种作平行线的重要方法．

例3 如图 9－20 所示的一块木料中，棱 BC 平行于平面 $A_1B_1C_1D_1$，要经过平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点 P 和直线 BC 将木料锯开，怎样画线？

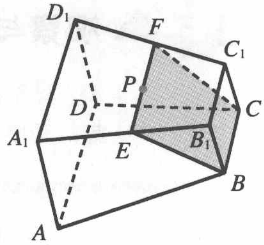


图 9－20

分析：由 BC//平面 $A_1B_1C_1D_1$，平面 $A_1B_1C_1D_1 \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = B_1C_1$，从而 $BC // B_1C_1$，因此问题转化成在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内过 P 点作一直线 EF 与 B_1C_1 平行，由 $EF//BC$ 就可以确定平面 $BCFE$，沿此平面将木料锯开就可满足要求．

解：在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，过点 P 画直线 EF，使 $EF // B_1C_1$，EF 分别交棱 A_1B_1，C_1D_1 于点 E，F，连 BE，CF，则 EF，BE，CF 就是应画的线．

练习

1. 判断下列命题是否正确：

(1) 若直线 a//平面 M，直线 a//直线 b，则直线 b//平面 M； (　　)

(2) 若直线 a//平面 M，直线 b//平面 M，则直线 a//直线 b； (　　)

(3) 若直线 a//直线 b，直线 $b\subset$平面 M，则直线 a//平面 M； (　　)

(4) 若直线 a//平面 M，直线 a//平面 N，平面 $M\cap$平面 $N=b$，则 $a//b$. (　　)

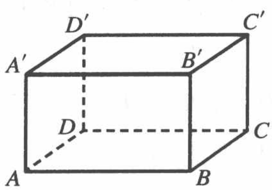
2. 如图，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，

(1) 与 AB 平行的平面是______________；

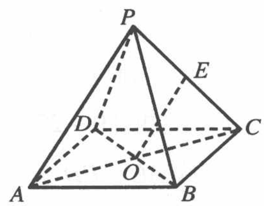
(2) 与 CC' 平行的平面是______________；

(3) 与 $A'D'$ 平行的平面是______________.

3. 如图，P 是平行四边形 $ABCD$ 外一点，O 为 AC 和 BD 的交点，E 是 PC 的中点．求证：OE//平面 PAD.



第 2 题



第 3 题

4. 平面与平面

观察与思考

观察教室的天花板与地面，它们所在的平面无论怎样延展，都不会有公共点，而墙面与地面则相交于一条直线．

这就反映出空间不重合的两个平面之间的位置关系有且只有以下两种：

（1）**两个平面平行**：两个平面没有公共点；

（2）**两个平面相交**：两个平面有且只有一条公共直线．

画两个互相平行的平面时，要注意使表示平面的两个平行四边形的对应边平行，如图 9－21.

平面 α 与平面 β 平行，记做 $\alpha /\!/ \beta$.

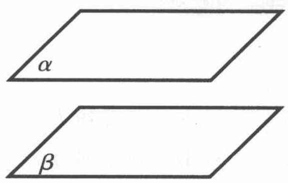


图 9－21

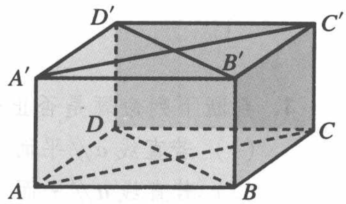


图 9－22

想一想 分别在两个平行平面内的两条直线的位置关系如何？

判定两个平面是否平行，关键在于判定它们有没有公共点．如果一个平面内的所有直线都与另一个平面平行，那么这两个平面一定平行．否则，这两个平面就会有公共点，并且有一条经过该点的公共直线，显然这条公共直线不平行于另一个平面．

如图 9－22，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，平面 $ABCD$ 内的两条相交直线 AC、BD 分别与平面 $A'B'C'D'$ 内的两条相交直线 $A'C'$、$B'D'$ 平行，由直线与平面平行的判定定理可知，相交直线 AC、BD 都与平面 $A'B'C'D'$ 平行，所以平面 $ABCD$ 平行于平面 $A'B'C'D'$.

一般地，我们有下面的两个平面平行的**判定定理**（图 9－23）：

如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面，那么这两个平面互相平行．

这个判定定理告诉我们，可以利用直线与平面平行来判定平面与平面平行．

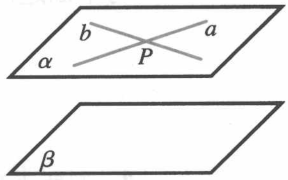


图 9－23

如果两个平面平行，其中一个平面内的一条直线 l 与另一个平面内的任意一条直线有怎样的位置关系？如何在另一个平面内找一条与直线 l 平行的直线？

例4 如图 9－24，已知平面 α，β，γ 满足 $\alpha /\!/ \beta$，$\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b$.

求证：$a /\!/ b$.

分析：因为直线 a，b 分别在两个平行平面内，所以它们没有交点，又因为直线 a，b 同在平面 γ 内，由平行线的定义可得 $a /\!/ b$.

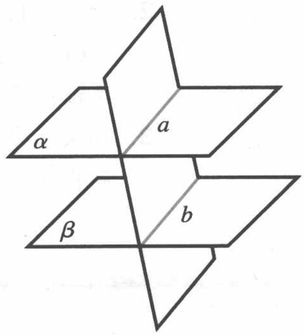


图 9－24

证明：$\because \alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b$，

$\therefore a \subset \alpha$，$b \subset \beta$.

又 $\because \alpha /\!/ \beta$，

$\therefore a$，b 没有公共点，

又 $\because a$，b 同在平面 γ 内，

$\therefore a /\!/ b$.

由此我们得到两个平面平行的**性质定理**：

如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线互相平行．

议一议

如图 9－25，$\alpha /\!/ \beta$，$AA' /\!/ BB'$，A，$B \in \alpha$，A'，$B' \in \beta$. 试判断线段 AA' 与 BB' 是否相等．

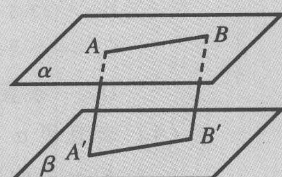


图 9－25

根据前面的讨论我们可以看到，利用直线与平面平行可以判定平面与平面平行；而由平面与平面平行的定义以及性质定理可以得出直线与平面平行、直线与直线平行．这进一步揭示出直线与直线、直线与平面、平面与平面之间的平行关系可以相互转化．

练习

1. 判断下列命题是否正确：

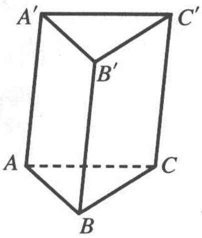
(1) 分别在两个平行平面内的两条直线都平行；（　　）

(2) 如果两个平面都和第三个平面平行，那么这两个平面互相平行；（　　）

(3) 平行于同一条直线的两个平面平行．（　　）

2. 如图，A，B，C 为不在同一条直线上的三个点，$AA' /\!/ BB' /\!/ CC'$，且 $AA' = BB' = CC'$.

求证：平面 $ABC /\!/$ 平面 $A'B'C'$.



第 2 题

3. 如果三个平面两两相交，那么它们的交线有多少条？试画出图形表示你的结论．

习题 二

1. 选择题：

(1) 两条直线为异面直线，指的是（　　）；

A. 不同在任何一个平面内的两条直线

B. 在空间内不相交的两条直线

C. 分别位于两个不同平面内的两条直线

D. 平面内的一条直线与这个平面外的一条直线

(2) 直线 a，b 是异面直线，$c /\!/ a$，则直线 c，b（　　）；

A. 是异面直线　　B. 是相交直线　　C. 不平行　　D. 可能平行

(3) 下列命题中，错误的是（　　）；

A. 平行于同一条直线的两个平面平行

B. 平行于同一个平面的两个平面平行

C. 一个平面与两个平行平面相交，则交线平行

D. 一条直线与两个平行平面中的一个相交，则必与另一个相交

(4) 若直线 a 不平行于平面 α，则下列结论成立的是（　　）；

A. α 内的所有直线都与直线 a 异面　　B. α 内不存在与 a 平行的直线

C. α 内的直线都与直线 a 相交　　D. 直线 a 与平面 α 有公共点

(5) 已知直线 $a //$ 平面 α，$P \in \alpha$，则过点 P 且平行于 a 的直线（　　）；

A. 只有一条，不在平面 α 内　　B. 有无数条，不一定在平面 α 内

C. 只有一条，且在平 α 面内　　D. 有无数条，且一定在平面 α 内

(6) 下列命题中正确的是（　　）；

A. 若一个平面内的无数条直线和另一个平面平行，则这两个平面平行

B. 分别在两个平面内的两条直线相互平行，则这两个平面平行

C. 平面 α 内任意一条直线都平行于另一个平面，则这两个平面平行

D. 若 a，b 是平面 α 外的两条平行线，则经过 a，b 的平面 β 必与 α 平行

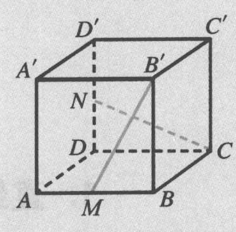
(7) 在空间，若直线 a，b 互相垂直，直线 a，c 互相垂直，则直线 b，c（　　）；

A. 互相垂直　　B. 互相平行

C. 是异面直线　　D. 不能确定位置关系

(8) 如图，在正方体中，M，N 分别是 AB，DD' 的中点，则异面直线 $B'M$ 与 CN 所成的角是（　　）；

A. 0°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°



第 1 (8) 题

(9) 给出三个命题：

①若两条直线和第三条直线所成的角相等，则这两条直线互相平行．

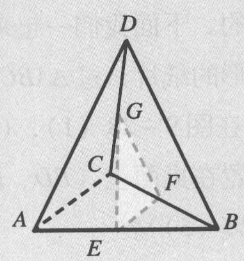
②若两条直线都和第三条直线垂直，则这两条直线互相平行．

③若两条直线都和第三条直线平行，则这两条直线互相平行．

其中，不正确命题的个数是（　　）．

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 如图，空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G 分别是 AB，BC，CD 的中点．求证：$BD //$ 平面 EFG；$AC //$ 平面 EFG.

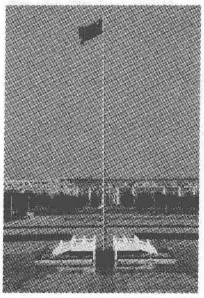


第 2 题

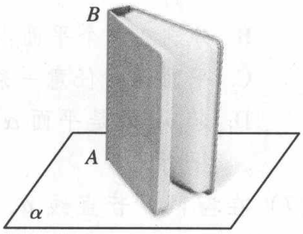
9.3 直线、平面垂直的判定与性质

引例

在生活中，我们会遇到很多直线与平面垂直的实例，如图 9－26，旗杆与地面的位置关系；打开的书直立在桌面上，书脊 AB 和桌面 α 的位置关系，它们都给我们以直线与平面垂直的印象.



（1）



（2）

图 9－26

1. 直线与平面垂直的判定与性质

如果一条直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说直线 l 与平面 α 互相垂直，记做 $l\perp\alpha$．直线 l 叫做平面 α 的**垂线**，平面 α 叫做直线 l 的**垂面**．直线与平面垂直时，它们唯一的公共点 O 叫做**垂足**.

画直线与平面垂直时，通常把直线画成与表示平面的平行四边形的一边垂直，如图 9－27 所示.

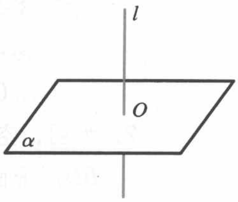
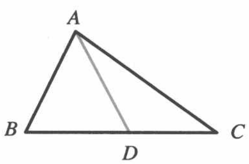


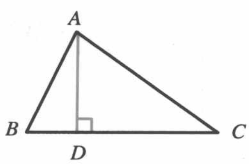
图 9－27

要判定一条直线与一个平面是否垂直，我们现在只能依据直线与平面垂直的定义．但是，利用定义来判定显然是很困难的．下面我们一起来做一个试验：

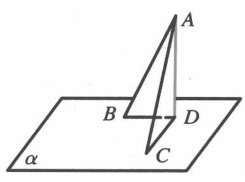
准备一块三角形的纸片，过 ΔABC 的顶点 A 翻折纸片，得到折痕 AD. 在图 9－28（1），（2）两种不同的折法中，哪一种将翻折后的纸片竖起放置在桌面上（BD、DC 与桌面接触），能使折痕 AD 与桌面 α 垂直（图 9－28（3））？



（1）



（2）



（3）

图 9－28

根据上面的试验结果，我们发现，第二种折法能使折痕与桌面垂直．因此，一般地，我们有下面的**判定定理**：

如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面．

想一想

如果两条平行线中有一条垂直于一个平面，那么另一条直线与这个平面的位置关系是什么？

例1 如图9－29，有一旗杆AB高8米，它的顶端A挂有一条10米长的绳子，拉紧绳子并把它的下端放在地面上的两点C，D. 若这两点都和旗杆与地面交点B的距离为6米，则旗杆就和地面垂直，为什么？

分析：根据直线与平面垂直的判定定理可知，要证明旗杆与地面垂直，只要证明旗杆与地面内的两条相交线垂直即可．而根据题目中的已知条件，我们利用勾股定理很容易验证$AB\perp BC$，$AB\perp BD$. 所以旗杆与地面垂直．

解：在ΔABC和ΔABD中，

$\because AB=8$，$BC=BD=6$，$AC=AD=10$，

$\therefore AB^2+BC^2=8^2+6^2=10^2=AC^2$，

$AB^2+BD^2=8^2+6^2=10^2=AD^2$，

$\therefore \angle ABC=\angle ABD=90°$.

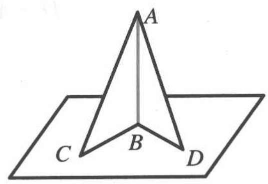


图9－29

即$AB\perp BC$，$AB\perp BD$.

又$\because C$，B，D三点不共线，

$\therefore AB\perp$平面BCD.

即旗杆与地面垂直．

想一想

在长方体$ABCD-A'B'C'D'$中，棱AA'，BB'，CC'，DD'所在的直线都垂直于平面$ABCD$，它们之间具有怎样的位置关系呢？

直线与平面垂直有下面的**性质定理**：

如果两条直线垂直于同一个平面，那么这两条直线互相平行．

直线与平面垂直的性质定理给出了一个判定两条直线平行的方法，该定理揭示了“平行”与“垂直”之间的内在联系．

试一试

你能总结一下我们学过的知识中，哪些可以用于判定两条直线平行吗？

练习

1. 判断下列命题是否正确：

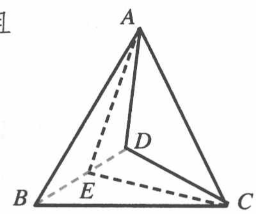
(1) 如果一条直线垂直于平面内的两条直线，那么这条直线垂直于这个平面；（　　）

(2) 如果三条直线相交于一点，并且它们两两垂直，那么其中任意一条直线垂直于另两条直线所确定的平面；（　　）

(3) 已知直线 $a\perp$ 直线 b，直线 $a\perp$ 平面 M，那么直线 $b/\!/$ 平面 M；（　　）

(4) 一条直线垂直于一个平面，它就垂直于这个平面内的所有直线．（　　）

2. 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，E 是 BD 的中点，且 $AD=AB$，$BC=CD$. 求证：$BD\perp$ 平面 AEC.



第 2 题

2. 直线与平面所成的角

观察与思考

图 9－30 是一个足球门，在这个图形中，三条直线 DA，DC，GF 与水平地面的倾斜程度是有区别的，为了准确的刻画直线与平面倾斜程度的大小，我们引入直线与平面所成的角的概念．

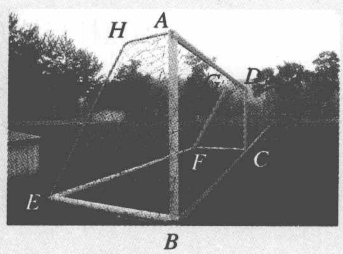


图 9－30

如果一条直线与一个平面相交，但不和这个平面垂直，那么这条直线就叫做这个平面的**斜线**，斜线与平面的交点叫做**斜足**．过斜线上斜足以外的一点向平面引垂线，垂线与平面的交点叫**垂足**．过垂足与斜足的直线叫做斜线在这个平面上的**射影**．

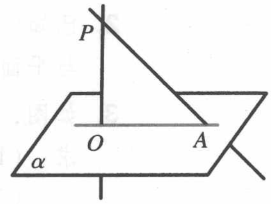


图 9－31

如图9－31 所示，直线 PA 为平面 α 的斜线，斜足为 A，垂足为 O，直线 OA 为斜线 PA 在平面 α 内的射影．

平面的一条斜线与它在平面上的射影所成的锐角，叫做**这条斜线与这个平面所成的角**．图 9－31 中的 $\angle PAO$ 就是斜线 PA 与平面 α 所成的角．

特别地，一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角是直角；一条直线与平面平行或在平面内，我们说它们所成的角是 $0°$ 角．

显然，直线与平面所成的角 θ 的变化范围是 $0° \leqslant \theta \leqslant 90°$.

例2 如图9－32，在正方体中，求对角线 BD' 与底面 $ABCD$ 所成角的正切．

分析：解决本题的关键是确定直线与平面所成的角，它的一般步骤是：

（1）确定直线与平面的交点（即为直线与平面所成的角的顶点）；

（2）由直线上一点向平面作垂线，并确定垂足；

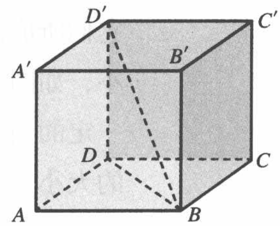


图 9－32

（3）确定射影线段；

（4）解斜线及其射影所构成的直角三角形，求出直线与平面所成的角或该角的三角函数值．

解：BD' 与底面 $ABCD$ 交于 B，D' 不在底面 $ABCD$ 内，

$\because$ $D'D \perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore$ 连结 DB，则 DB 是 $D'B$ 在底面 $ABCD$ 上的射影，且 $D'D \perp DB$，

则 $\angle DBD'$ 就是对角线 BD' 与底面 $ABCD$ 所成的角．

在直角三角形 BDD' 中，$\tan \angle DBD' = \dfrac{DD'}{BD} = \dfrac{DD'}{\sqrt{2}DD'} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

练习

1. 如果两条直线与同一个平面所成的角相等，那么这两条直线一定平行吗？

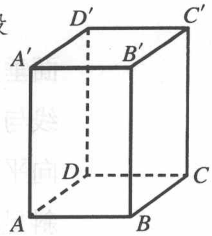
2. 已知斜线段的长是它在平面 α 上射影长的$\sqrt{2}$倍，求斜线段与平面 α 所成的角．

3. 如图，在长方体中，若 $AB=BC=2$，$CC'=2\sqrt{3}$．

求：(1) 直线 AB'与平面 $ABCD$ 所成的角；

(2) 直线 AC 与平面 $ABB'A'$所成的角；

(3) 直线 BD'与平面 $ABCD$ 所成角的正切值．



第 3 题

3. 平面与平面所成的角

我们已经学过两条相交直线所成的角、异面直线所成的角和直线与平面所成的角，现在我们来研究两个相交平面所成的角．

引例

在实际生产生活中，我们经常会遇到两个平面相交的情况，需要确定它们所成角的大小．筑堤坝时，必须考虑堤坝斜面与水面所成角度的大小，如图9－33（1）；使用笔记本电脑时，为了操作方便，两个面板要成一定的角度，如图9－33（2），等等．为了描述两个相交平面所构成的角的大小，我们引入二面角的概念．

(1)

(2)

图 9－33

工具箱

平面内的一条直线把平面分成两部分，这两部分通常叫做**半平面**.

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做**二面角**．这条直线叫做**二面角的棱**，这两个半平面叫做**二面角的面**．

通常我们可将二面角记做“二面角 $M-AB-N$”(图9－34（1）) 或“二面角 $\alpha-l-\beta$”（图9－34（3））；有时为了方便，也可以在两个面内分别取点 C，F，将这个二面角记做“二面角 $F-AB-C$”（图9－34（4））．

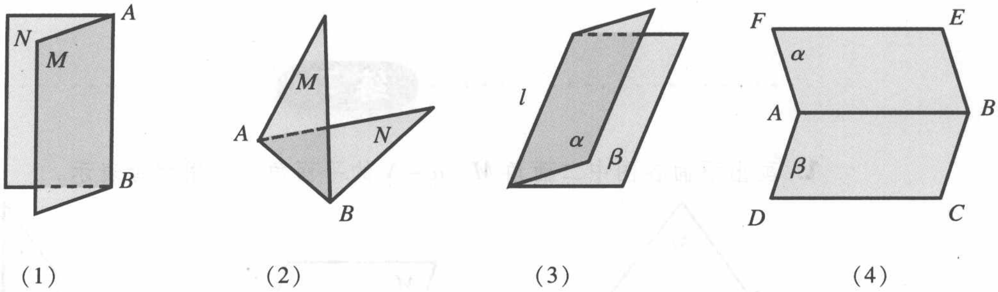


图 9-34

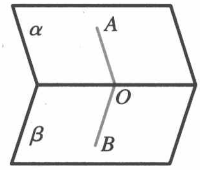


图 9-35

以二面角的棱上任意一点 O 为端点，在两个半平面内分别作垂直于棱的两条射线 OA 和 OB，则这两条射线所成的 $\angle AOB$ 叫做**二面角的平面角**（图 9-35）.

想一想　$\angle AOB$ 的大小与点 O 在 l 上的位置有关吗？为什么？

二面角的大小可以用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度.

平面角是直角的二面角叫做**直二面角**.

议一议　二面角的平面角的变化范围是什么？

例3 如图 9-36，在 30°的二面角 $M-a-N$ 的一个面 M 内有一个点 P，它到另一个面的距离是 10cm，求点 P 到棱的距离.

分析：解决本题的关键是作出二面角的平面角，具体方法如下：

从面 M 内的点 P 作平面 N 的垂线 PO，垂足为 O. 作 OC 垂直于棱 a，垂足为 C，连结 PC，则 $a\perp$ 平面 POC，所以 $PC\perp a$，即 $\angle PCO$ 是二面角 $M-a-N$ 的平面角，且 PC 就是点 P 到棱的距离.

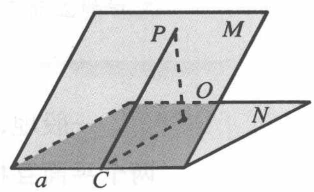


图 9-36

解：由分析过程知，$\angle PCO=30°$，

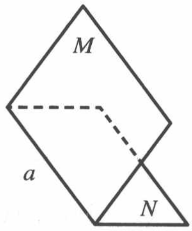
在直角三角形 POC 中，$PO=10$，

$$PC=\frac{PO}{\sin 30°}=\frac{10}{\frac{1}{2}}=20.$$

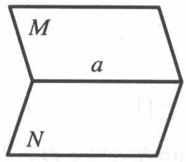
所以，点 P 到棱的距离是 20cm.

练习

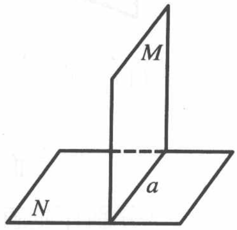
1. 画出下面各图中二面角 $M-a-N$ 的平面角，并用字母表示.



(1)



(2)



(3)

第 1 题

2. 二面角 $M-a-N$ 的平面角是锐角，在面 M 内有一点 A，点 A 到棱 a 的距离是 6cm，点 A 到面 N 的距离是 3cm. 求二面角 $M-a-N$ 的平面角的大小.

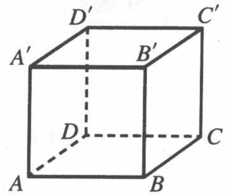
3. 如图，在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，

(1) 二面角 $A-BB'-C'$ 的度数是________；

(2) 二面角 $D-BB'-C'$ 的度数是________；

(3) 二面角 $B'-AC-B$ 的平面角的正弦值是________；

(4) 二面角 $C'-BD-A$ 的平面角的正切值是________.



第 3 题

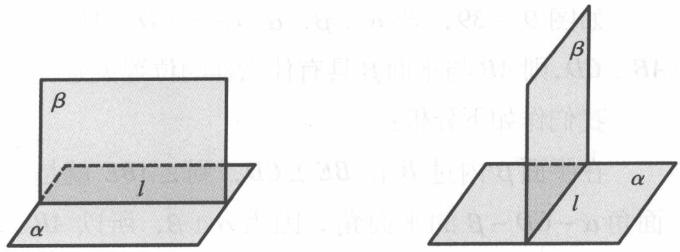
4. 平面与平面垂直的判定与性质

观察与思考

观察教室里的墙面与地面，相邻两个墙面以及任一墙面与地面所成的角是怎样的二面角?

一般地，两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这**两个平面互相垂直**.

两个互相垂直的平面通常画成图 9－37 中（1），（2）的样子，即直立平面的竖边与水平平面的横边垂直.



(1)　　　　　(2)

图 9－37

平面 α 与平面 β 垂直，记做 $\alpha \perp \beta$.

一般地，两个平面垂直有下面的**判定定理**：

> 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

例4 如图 9－38，PA 垂直于⊙O 所在的平面，AB 是⊙O 的直径，C 是圆周上异于 A，B 的任意一点．试判断平面 PAC 与平面 PBC 的位置关系，并说明理由.

分析：因为 AB 是⊙O 的直径，所以 $AC \perp BC$，根据 PA 垂直于⊙O 所在的平面，可以得到 $PA \perp BC$，由直线与平面垂直的判定定理可得：$BC \perp$ 平面 PAC. 而 BC 在平面 PBC 内，根据两个平面垂直的判定定理，我们可以判定平面 PAC 与平面 PBC 互相垂直.

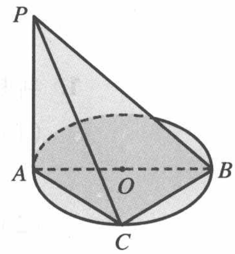


图 9－38

解：$\because PA \perp$ 平面 ABC，$BC \subset$ 平面 ABC，

$\therefore PA \perp BC$.

又 $\because AB$ 是⊙O 的直径，C 在圆周上，

$\therefore \angle ACB = 90°$，即 $AC \perp BC$.

$\therefore BC \perp$ 平面 PAC.

$\because BC \subset$ 平面 PBC，

$\therefore$ 平面 $PAC \perp$ 平面 PBC.

> **工具箱**
>
> 直径所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径.

> **议一议**
>
> 在图 9－38 中，除了平面 PAC、平面 PBC 以外，是否还存在其他互相垂直的两个平面？如果有，请找出来.

如图 9－39，若 $\alpha \perp \beta$，$\alpha \cap \beta = CD$，$AB \subset \alpha$，$AB \perp CD$，则 AB 与平面 β 具有什么样的位置关系？

我们作如下分析：

在平面 β 内过 B 作 $BE \perp CD$，则 $\angle ABE$ 就是二面角 $\alpha - CD - \beta$ 的平面角．因为 $\alpha \perp \beta$，所以 $AB \perp BE$. 又因为 $AB \perp CD$，所以 $AB \perp \beta$.

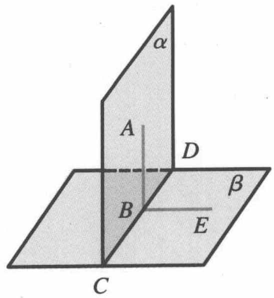


图 9－39

由此，我们得到了如下两平面垂直的**性质定理**：

> 如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面．

想一想

如果两个相交平面都垂直于第三个平面，那么它们的交线与第三个平面有什么样的位置关系？

练习

1. 判断下列命题是否正确：

（1）如果平面 $\alpha \perp$ 平面 β，那么平面 α 内的所有直线都垂直于平面 β； （　　）

（2）如果平面 $\alpha \perp$ 平面 β，那么平面 α 内一定存在直线平行于平面 β； （　　）

（3）如果平面 α 不垂直于平面 β，那么平面 α 内一定不存在直线垂直于平面 β； （　　）

（4）如果平面 $\alpha \perp$ 平面 γ，平面 $\beta \perp$ 平面 γ，$\alpha \cap \beta = l$，那么 $l \perp \gamma$. （　　）

2. 已知两个平面垂直，试判断下列命题的正误：

（1）一个平面内的已知直线必垂直于另一个平面内的任意一条直线； （　　）

（2）一个平面内的已知直线必垂直于另一个平面内的无数条直线； （　　）

（3）一个平面内的任意一条直线必垂直于另一个平面； （　　）

（4）过一个平面内的任意一点作交线的垂线，则此垂线必垂直于另一个平面． （　　）

***3.** 已知三条直线共点，且两两垂直，求证它们中每两条直线所确定的平面也两两垂直．

习题 三

1. 判断正误：

(1) 垂直于同一条直线的两个平面互相平行； (　　)

(2) 垂直于同一个平面的两条直线互相平行； (　　)

(3) 垂直于同一个平面的两个平面互相平行； (　　)

(4) 一条直线在平面内，另一条直线与这个平面垂直，则这两条直线互相垂直． (　　)

2. 填空题：

(1) 已知斜线段的长是它在平面 M 上射影长的 2 倍，则斜线段与平面 M 所成的角为________；

(2) 在 $45°$ 的二面角的一个面内有一点 A，点 A 到另一个面的距离是 a，则点 A 到棱的距离是________；

(3) 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，二面角 $D'-BC-D$ 的大小是________；

(4) 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，二面角 $D'-AC-D$ 的正切值是________；

(5) 已知直线 a，b 和平面 α，且 $a\perp b$，$a\perp\alpha$ 则 b 与 α 的位置关系是________；

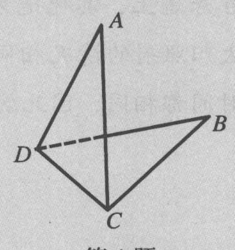
(6) 平面 $M /\!/$ 平面 α，平面 $N /\!/$ 平面 β，平面 $M\perp$ 平面 N，则平面 α 与平面 β 的位置关系是________.

3. 在直二面角 $M-l-N$ 内有一点 S，它到两个半平面的距离分别是 4cm 和 3cm，求点 S 到棱 l 的距离．

4. 如图，等腰 ΔACD 和等腰 ΔBCD 具有共同的底边 CD，且 $CD=6$，腰 $AC=BC=5$.

(1) 若二面角 $A-CD-B$ 是 $60°$，求 A，B 两点的距离；

(2) 若 A，B 两点的距离是 $4\sqrt{2}$，求二面角 $A-CD-B$ 的大小．



第 4 题

阅读空间　地球公转为什么“歪着身子”？

黄赤交角是指地球自转的赤道平面与地球公转的黄道平面之间的夹角，黄赤交角是一个二面角，其大小是$23°26'$，如图9－40所示．

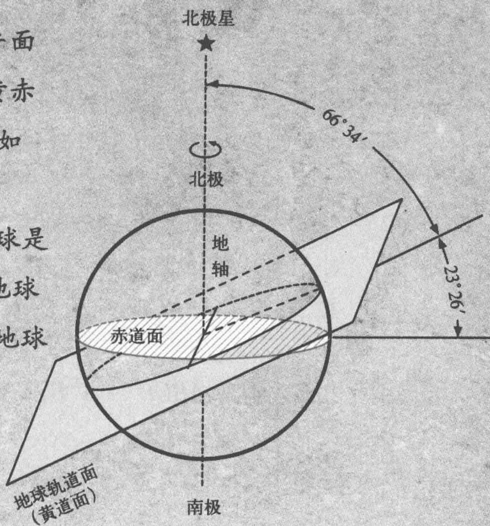


图9-40　黄道平面与赤道下面的交角

因为有黄赤交角的存在，所以地球是“歪着身子”绕太阳公转的，这样，地球在绕太阳公转的过程中，太阳光直射地球表面的位置将在南、北纬23度26分之间移动．并且地轴在宇宙空间的方向不因季节而变化，不再与黄道面重合，而是有66度34分的倾斜．太阳光直射的地区天气热，是夏天；斜射的地区天气冷，是冬天．所以当太阳光直射地球赤道以北时，北半球将慢慢进入夏季，南半球将慢慢进入冬季．反之，当太阳光直射地球赤道以南时，北半球将慢慢进入冬季，南半球将慢慢进入夏季．从而就形成了地球上一年四季的变化．

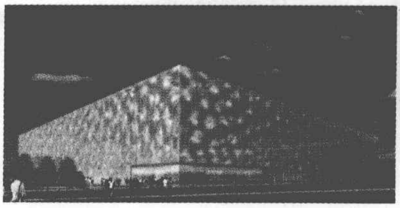
如果黄赤交角不是23度26分，是90度的话，那么地球在绕太阳公转的时候，太阳光将始终直射在赤道上，其他地方都是斜射的，纬度越高，斜射得越厉害，南北两半球被太阳照射的情况相同，地球上同一个地方在任何时间内，阳光照射的方式和时间都相同，因此就会没有冷暖和季节变化．

9.4 空间几何体的结构特征

现实生活中，我们可以看到各种各样的物体，它们都占有一定的空间．如果只考虑这些物体的大小和形状，而不考虑其他因素，那么由这些物体抽象出来的空间图形就叫做**空间几何体**．

引例

下图是 2008 年北京奥运会游泳比赛的场馆——国家游泳中心以及著名的古埃及金字塔，它们的轮廓线如图 9－41 所示：



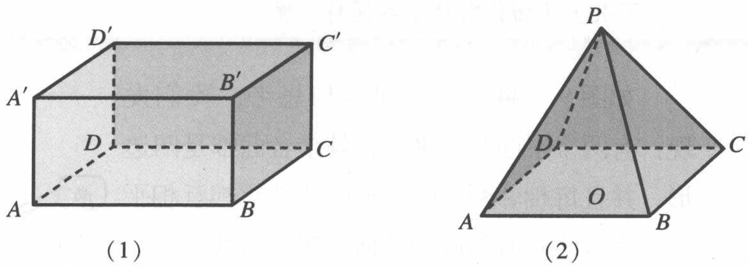


图 9－41

1. 多面体的结构特征

通过观察发现，这些几何体都是由若干个平面多边形围成的，我们把这样的几何体叫做**多面体**．图 9－41 中的几何体都是多面体．

如图 9－42，围成多面体的每个多边形叫做这个多面体的**面**，如面 $ABCD$、面 $BCC'B'$；相邻两个面的公共边叫做多面体的**棱**，如棱 AB、棱 CC'；棱与棱的公共点叫做多面体的**顶点**，如顶点 A'、D；连结不在同一个面上的两个顶点的线段叫做多面体的**对角线**，如对角线 $A'C$.

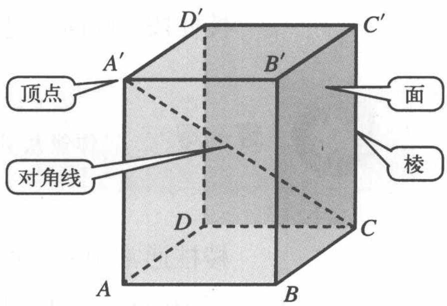


图 9－42

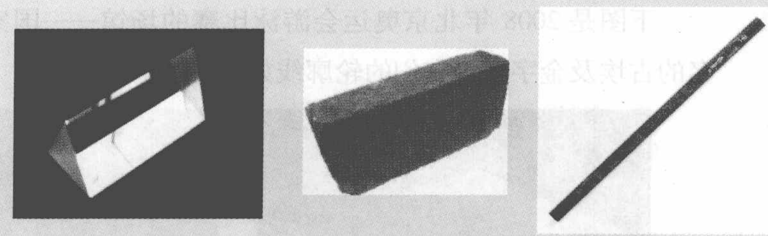
在生产实践中，棱柱和棱锥是最常见也是最简单的多面体，下面我们

就对它们的结构特征分别进行说明.

(1) 棱柱的结构特征

观察与思考

我们常见的一些物体，如三棱镜、砖块、六棱铅笔（图 9-43）都是具有棱柱结构特征的物体.



(1)　(2)　(3)

图 9-43

那么上述物体有什么共同特征呢?

如图 9-44，通过观察与思考，我们发现：有两个平面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的几何体叫做**棱柱**. 棱柱中相互平行的两个面叫做棱柱的**底面**，其余的各面叫做棱柱的**侧面**，相邻两个侧面的公共边叫做棱柱的**侧棱**，侧棱与底面的公共点叫做棱柱的**顶点**，不在同一个面上的两个顶点的连线叫做棱柱的**对角线**，两个底面间的距离叫做棱柱的**高**.

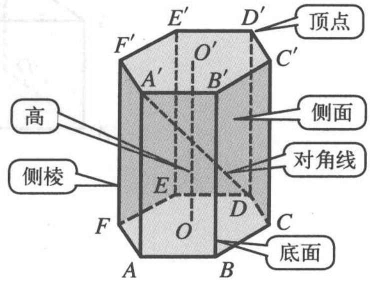


图 9-44

棱柱按照底面多边形的边数可分为三棱柱、四棱柱、五棱柱等等.

想一想　你能从见到过的实际物体中找出一些棱柱的实例吗?

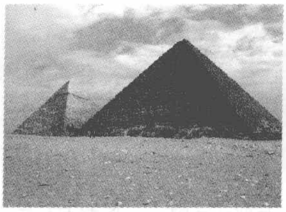
棱柱通常用表示两个底面多边形的字母来表示，如图 9-44 中的棱柱，可记做棱柱 $ABCDEF-A'B'C'D'E'F'$，或简单地用表示一条对角线的两个端点的字母来表示，如棱柱 $A'D$.

侧棱垂直于底面的棱柱叫做**直棱柱**，底面是正多边形的直棱柱叫做**正棱柱**. 图 9-44 中的棱柱就是一个正六棱柱.

今后，如不作说明，本节所指的棱柱都是直棱柱．

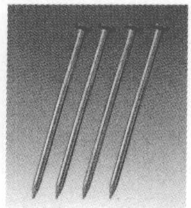
(2) 棱锥的结构特征

图 9－45 中，埃及的金字塔、我国古建筑的塔顶部分、铁钉的尖端部分等，都给我们以棱锥的形象．



(1)

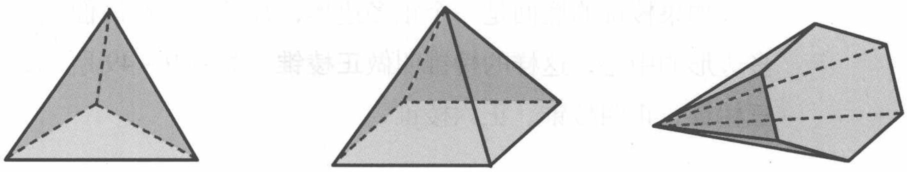
(2)



(3)

图 9－45

观察图 9－46 中的一组几何体，指出它们结构的共同特征．



(1) (2) (3)

图 9－46

想一想　将上述物体与棱柱进行比较，有什么不同?

这样的几何体是由平面图形围成的，其中一个面是多边形，其余各面都是三角形，并且这些三角形有一个公共顶点．

一般地，有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形所围成的多面体叫做**棱锥**．这个多边形叫做棱锥的**底面（或底）**，有公共顶点的三角形面叫做棱锥的**侧面**，各侧面的公共顶点叫做棱锥的**顶点**，相邻侧面的公共边叫做棱锥的**侧棱**．如果棱锥的底面水平放置，则过顶点的铅垂线与底面的交点到顶点的距离叫做棱锥的**高**（图 9－47）．

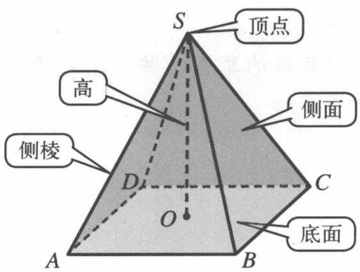


图 9－47

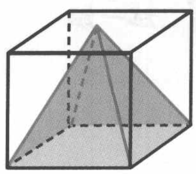


图 9－48

底面是三角形、四边形、五边形、…的棱锥分别叫做三棱锥、四棱锥、五棱锥、…，其中三棱锥又叫做四面体．

图9－46中的（2）可以看做是四棱柱的一个底面收缩为一个点时，得到的相应几何体，如图9－48.

想一想

若将棱锥的定义叙述为“有一个面是多边形，其余各面都是三角形，由这些面所围成的多面体叫做棱锥”，可以吗？

棱锥也可以用表示顶点和底面各顶点的字母，或者用表示顶点和底面的一条对角线端点的字母来表示，如图9－47中的四棱锥可以表示为棱锥$S-ABCD$，或$S-AC$.

如果棱锥的底面是一个正多边形，并且顶点在底面上的射影是底面正多边形的中心，这样的棱锥叫做**正棱锥**．如图9－49所示，它们分别为正三棱锥、正四棱锥、正六棱锥．

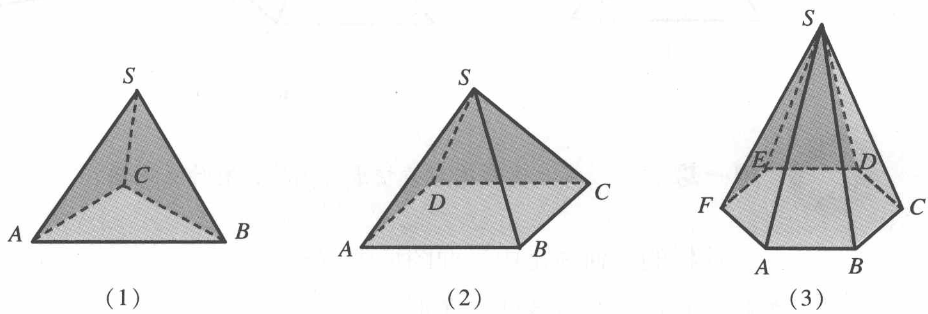


图9－49

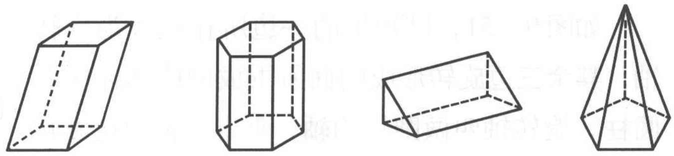
正棱锥的各侧面都是全等的等腰三角形，各等腰三角形底边上的高相等．正棱锥的侧面等腰三角形底边上的高叫做正棱锥的**斜高**．正棱锥的斜高相等．

侧棱和底面边长相等的正三棱锥叫**正四面体**（图9－49（1））．

试一试　画一个正四棱锥的草图，并作出它的高与斜高．

练习

1. 分别说出下列物体的主要结构特征：



2. 判断下列命题是否正确：

(1) 有两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱；（ ）

(2) 有一个侧面垂直于底面的棱柱是直棱柱；（ ）

(3) 长方体是直棱柱；（ ）

(4) 底面是正方形的棱柱是正棱柱；（ ）

(5) 每个侧面都是全等的矩形的四棱柱是正四棱柱.（ ）

3. 判断下列命题是否正确：

(1) 有一个面是多边形，其余各面是三角形的几何体是棱锥；（ ）

(2) 底面是正方形的棱锥是正四棱锥；（ ）

(3) 所有侧棱长都相等的棱锥是正棱锥；（ ）

(4) 正三棱锥是正四面体.（ ）

2. 旋转体的结构特征

观察与思考

在现实生活中，我们还经常会遇到下面的一些物体，如图 9－50 所示，观察它们的轮廓线表示的几何体又有哪些共同特征呢？

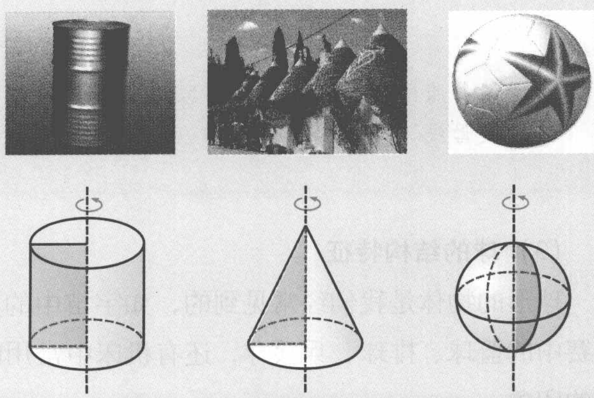


图 9－50

通过观察，我们发现这些物体抽象出的几何体可以看成是由一个封闭的平面图形绕着它所在的平面内的一条定直线旋转一周所围成的，我们把这样的几何体叫做**旋转体**．这条定直线叫做旋转体的**轴**．

（1）**圆柱的结构特征**

如图 9－51，以矩形的一边所在直线为旋转轴，其余三边旋转形成的面所围成的旋转体叫做**圆柱**．旋转轴叫做圆柱的**轴**，垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆柱的**底面**，平行于轴的边旋转而成的曲面叫做圆柱的**侧面**，无论旋转到什么位置，平行于轴的边都叫做圆柱的**母线**．

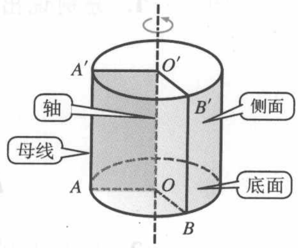


图 9－51

圆柱用表示它的轴的字母表示，如图 9－51 中的圆柱可表示为圆柱 OO'.

圆柱和棱柱统称为**柱体**．

> **试一试** 请你举出生活中圆柱的实例，并指出它们的结构特征．

（2）**圆锥的结构特征**

与圆柱一样，圆锥也可以看做是由平面图形旋转而成的．

如图 9－52，以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成的面所围成的旋转体叫做**圆锥**.

圆锥也有轴、底面、侧面和母线，如图 9－52 所示．

圆锥和棱锥统称为**锥体**．

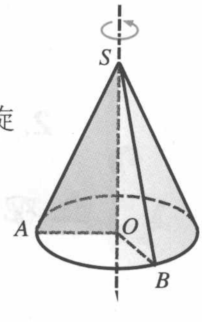


图 9－52

> **试一试** 请仿照图 9－51，在图 9－52 中标出圆锥的轴、底面、侧面及母线．

（3）**球的结构特征**

球形的物体是我们经常见到的，如宇宙中的太阳、地球、月亮，体育比赛中的篮球、排球、乒乓球，还有机床中常用的滚珠等，都给我们留下球的印象．

想一想

如果一个半圆绕着它的直径所在的直线旋转一周，半圆运动的轨迹所围成的几何体将是怎样的空间图形？

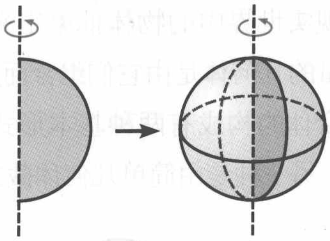


图 9－53

以半圆的直径所在的直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的旋转体，叫做**球体**（图 9－53），简称**球**．

半圆的圆心叫做**球心**，半圆的半径叫做球的**半径**，半圆的直径叫做球的**直径**．

球常用表示球心的字母来表示，如图 9－54 中的球表示为球 O．

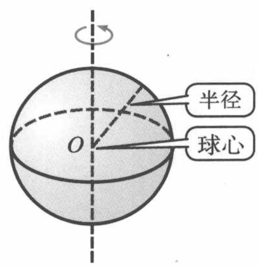


图 9－54

可以发现，球面可以看做是一个半圆绕着它的直径所在的直线旋转一周所形成的曲面．

球面是到定点（球心）的距离等于定长（半径）的所有点的集合．

球体是到定点（球心）的距离小于等于定长（半径）的所有点的集合．

想一想　球与球面的区别在哪里？

练习

1. 判断下列命题是否正确：

(1) 半圆以其直径为轴旋转所成的曲面是球；　(　　)

(2) 到定点的距离等于定长的所有点的集合是球；　(　　)

(3) 经过球面上不同的两点只能作一个以球心为圆心的圆．　(　　)

2. 填空：

(1) 设球的半径为 R，则过球面上任意两点的截面圆中，最大面积是________；

(2) 经过球的半径的中点，作一个垂直于这条半径的截面，则这个截面圆的半径是球半径的________.

3. 简单组合体的结构特征

我们从现实世界中的物体抽象出来的几何体，除了柱体、锥体和球体外，还有大量的几何体是由它们组合而成的，这些几何体叫做**简单组合体**.

简单组合体的构成有两种基本形式：一种是由简单几何体拼接而成的（图 9－55）；另一种是由简单几何体截去或挖去一部分而成的（图9－56）.

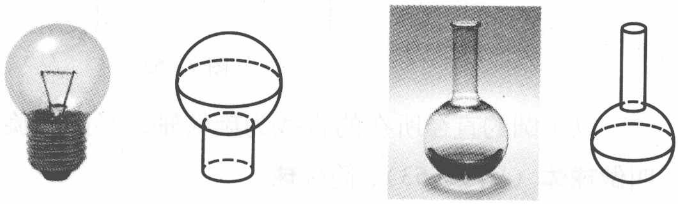


图 9－55

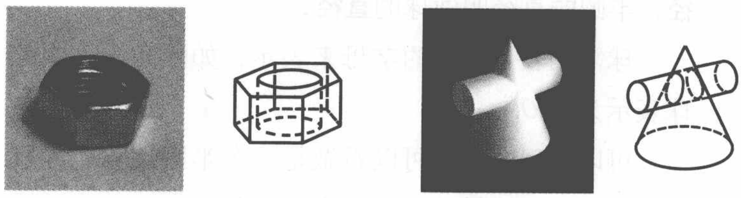


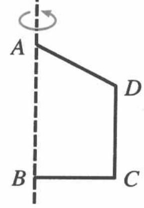
图 9－56

试一试 你能说出图中的物体是由哪些简单几何体组合而成的吗?

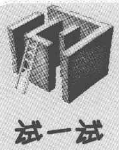
组合体可以通过把它们分解为一些我们学习过的基本几何体来研究.

练习

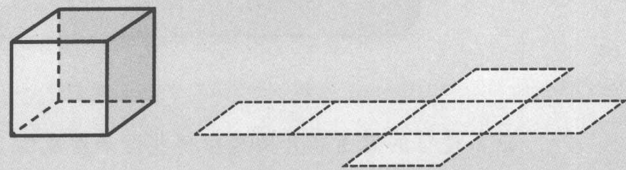
如图，将直角梯形 $ABCD$ 绕 AB 所在的直线旋转一周，由此形成的几何体是由哪些基本几何体构成的?



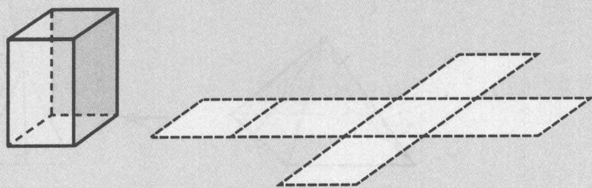
4. 多面体的表面积



初中，我们已经学习了正方体和长方体的表面积以及它们的展开图，你知道下面几何体的展开图与其表面积之间的关系吗？



（1）正方体及其展开图



（2）长方体及其展开图

图 9－57

正方体、长方体是由多个平面图形围成的多面体，它们的表面积就是各个面的面积之和，也就是展开图的全面积．

把直棱柱的侧面沿一条侧棱剪开后展在一个平面上，侧面展开图的面积就是棱柱的侧面积，如图 9－58.

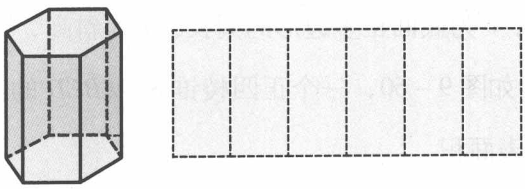


图 9－58

直棱柱的侧面展开图是什么图形?

可以看出，直棱柱的侧面展开图是一个矩形．这个矩形的一边长等于直棱柱底面的周长，另一边长等于侧棱长．

设直棱柱的底面多边形的周长为 c，侧棱长为 h，则直棱柱的侧面积是

$$S_{直棱柱侧}=ch$$

我们也可以得到直棱柱的表面积计算公式

$$S_{直棱柱表}=S_{直棱柱侧}+2S_{直棱柱底}$$

议一议

正四棱锥的侧面展开图是由哪些图形组成的（图 9－59）？如何计算它们的表面积？

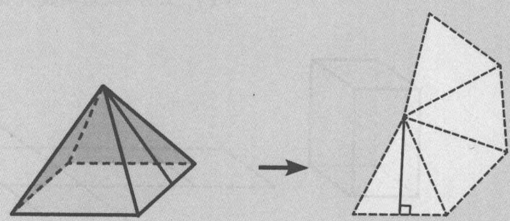


图 9－59

正棱锥的表面积等于它的侧面积与底面正多边形的面积之和．

$$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}ch'$$

$$S_{正棱锥表}=S_{正棱锥侧}+S_{底}$$

其中，c 为底面正多边形的周长，h' 为斜高．

例1 如图 9－60，一个正四棱锥 $S-ABCD$ 的高 SO 和底边边长都是 4，求它的表面积．

解：过点 O 作 $OE\perp BC$ 于点 E，连结 SE.

在直角三角形 SOE 中，

$$SE^2=SO^2+OE^2=16+4=20,$$

$$\therefore\quad h'=SE=2\sqrt{5}.$$

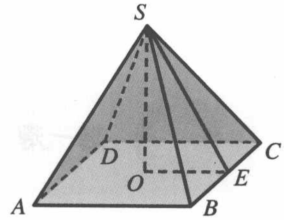


图 9－60

因此，$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}ch'=\frac{1}{2}\times4\times4\times2\sqrt{5}=16\sqrt{5}$，

$$S_{正棱锥表}=S_{正棱锥侧}+S_{底}=16\sqrt{5}+4\times4=16\sqrt{5}+16.$$

练 习

1. 已知正三棱锥的每个侧面都是等边三角形，并且侧棱长为 4，求它的侧面积和表面积．
2. 以一张长和宽分别为 8cm 和 4cm 的矩形硬纸板为侧面，将它折成正四棱柱，求该四棱柱的对角线的长．
3. 长方体的三条棱长的比是 1∶2∶3，它的表面积是 88cm^2，求这三条棱的长．

5. 旋转体的表面积

我们知道，圆柱的侧面展开图是一个矩形，如果圆柱的底面半径为 r，母线长为 l，那么圆柱的底面面积为 πr^2，侧面面积为 $2\pi rl$（图 9 - 61），因此，圆柱的表面积

$$S_{\text{圆柱表}}=2S_{\text{圆柱底}}+S_{\text{圆柱侧}}=2\pi r^2+2\pi rl=2\pi r(r+l)$$

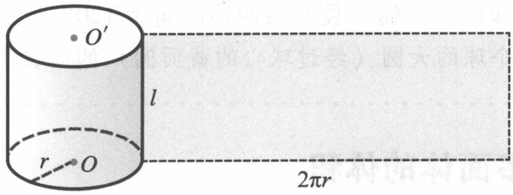


图 9 - 61

想一想 圆锥的侧面展开图是什么图形（图 9 - 62）？

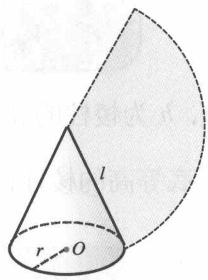


图 9 - 62

圆锥的侧面展开图是一个扇形（图 9 - 62）．如果圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，那么它的底面面积为 πr^2，侧面积为 πrl，因此，圆锥的表面积

$$S_{圆锥表}=S_{圆锥底}+S_{圆锥侧}=\pi r^2+\pi rl=\pi r(r+l)$$

例2 已知圆锥的底面半径为2，母线长为4，求圆锥的表面积.

解：该圆锥的表面积是侧面积与它的底面积的和，因此，$S=\pi\times2\times4+\pi\times2^2=12\pi$.

设球的半径为 R，它的表面积由半径 R 唯一确定，即它的表面积 S 也是以 R 为自变量的函数.

如果球的半径为 R，那么它的表面积

$$S_{球}=4\pi R^2$$

> **学习小贴示**
>
> 扇形面积的计算公式为 $S_{扇形}=\frac{1}{2}l\cdot r$，其中 r 为扇形的半径，l 为扇形的弧长.

练习

1. 已知圆柱的底面半径为2，母线长为4，求该圆柱的全面积.
2. 已知圆锥的侧面展开图的圆心角是120°，半径为4，求圆锥的全面积.
3. 一个球的大圆（经过球心的截面圆）的周长为8πcm，求这个球的表面积.

6. 多面体的体积

初中我们学习过正方体、长方体体积的计算公式

$$V=Sh.$$

其中，S 是底面面积，h 为高.

实际上，棱柱的体积公式可以统一为

$$V_{棱柱}=Sh$$

其中，S 是底面面积，h 为棱柱的高.

棱锥的体积是同底等高的棱柱体积的$\frac{1}{3}$，即棱锥的体积

$$V_{棱锥}=\frac{1}{3}Sh$$

其中，S 是底面面积，h 为棱锥的高.

例3 如图9－63，在长方体$ABCD-A'B'C'D'$中，截出一个棱锥$C-A'DD'$. 求这个棱锥的体积与剩余部分的体积之比.

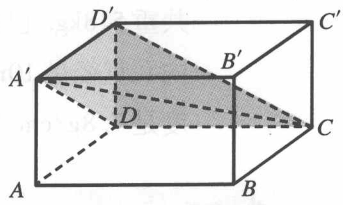


图9－63

解：将长方体看成四棱柱$ADD'A'-BCC'B'$，设它的底面$ADD'A'$的面积为S，高为h，则它的体积为$V=Sh$.

棱锥$C-A'DD'$的底面积为$\frac{1}{2}S$，高为h，因此棱锥$C-A'DD'$的体积为$V_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}Sh=\frac{1}{6}V$.

所以剩余部分的体积为$V-V_1=\frac{5}{6}V$.

因此，这个棱锥的体积与剩余部分的体积之比为1∶5.

想一想

图9－63中，三棱锥$C-A'DD'$的体积是三棱柱$B'CC'-A'DD'$的几分之几？三棱柱$B'CC'-A'DD'$的体积是长方体$ABCD-A'B'C'D'$的几分之几？

练习

1. 已知长方体的铝锭的长、宽、高分别是2，4，8，将它熔化后铸成一个正方体铝块（不计损耗）. 求铸成的铝块的棱长.
2. 已知正六棱柱的底面边长为4cm，高为6cm，求这个正六棱柱的体积.
3. 正三棱锥的底面边长为2，侧面均为直角三角形，求此三棱锥的体积.

7. 旋转体的体积

圆柱与棱柱的体积的计算方法类同，都等于它的底面积S和高h的乘积，即

$$V_{圆柱}=Sh$$

其中，S是底面面积，h是圆柱的高.

圆锥的体积也是同底等高的圆柱体积的$\frac{1}{3}$，即

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}Sh$$

其中，S 是底面面积，h 是圆锥的高．

例4 如图 9－64，有一堆相同规格的铁质六角螺帽毛坯共重 5.8kg. 已知底面六边形边长是 12mm，高是 10mm，内孔直径是 10mm. 那么这堆毛坯约有多少个？（铁的密度是 $7.8\mathrm{g/cm^3}$）

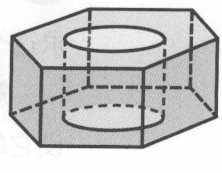


图 9－64

试一试

这是一个求组合体的体积问题，你能说出它是由哪些基本几何体组成的吗？

分析：六角螺帽毛坯的体积是一个正六棱柱体积与一个圆柱体积的差，再由铁的密度计算出一个六角螺帽毛坯的重量即可．

解：因为 $V_{正六棱柱}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times12^2\times6\times10$

$\approx3741\ (\mathrm{mm^3})$，

$V_{圆柱}=\pi\times5^2\times10\approx785(\mathrm{mm^3})$，

所以一个毛坯的体积为

$V=3741-785=2956\ (\mathrm{mm^3})=2.956\ (\mathrm{cm^3})$．

又因为 $5800\div(7.8\times2.956)\approx251$，

因此，这堆毛坯约有 251 个．

说明：求组合体的体积时，要注意组合体的结构特征，避免重叠和交叉等．

工具箱

如果等边三角形的边长为 a，那么它的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

设球的半径为 R，它的体积只与半径 R 有关，是以 R 为自变量的函数．

事实上，如果球的半径为 R，那么它的体积

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

其中，R 是球的半径．

例5 如图 9－65，圆柱的底面直径与高都等于球的直径，那么球的体积是圆柱体积的几分之几？

解：设球的半径为 R，则

圆柱的底面半径为 R，高为 $2R$.

因为 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$，$V_{圆柱}=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3$，

所以 $\frac{V_{球}}{V_{圆柱}}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3}=\frac{2}{3}$.

因此，球的体积是圆柱体积的$\frac{2}{3}$.

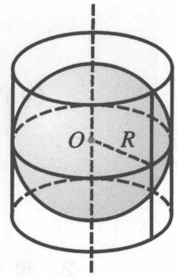
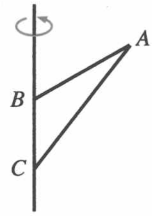


图 9－65

议一议　在例 5 中，试求圆柱的侧面积与球的表面积之比.

练习

1. 一个圆柱的底面半径为 3，母线长为 4，求这个圆柱的体积.
2. 如图，在 ΔABC 中，$AB=2$，$BC=\frac{3}{2}$，$\angle ABC=120°$，若将 ΔABC 绕直线 BC 旋转一周，求形成的旋转体的体积.
3. 有一个正方体，内接于半径为 R 的球内，求正方体的体积.

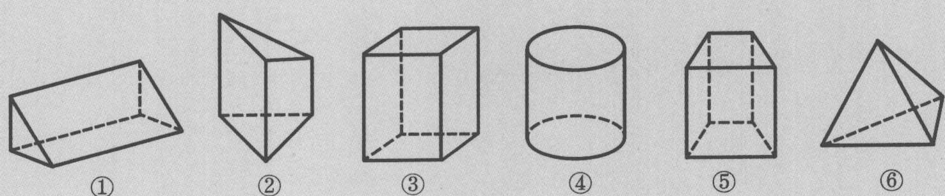


第 2 题

习题 四

1. 选择题：

(1) 下列几何体是棱柱的有（　　）；



A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

(2) 长方体的对角线长为 $2\sqrt{14}$，它的长、宽、高的比为 3∶2∶1，则长方体的表面积是（　　）；

A. 44　　B. 48　　C. 66　　D. 88

(3) 正四棱锥的底面边长为 a，斜高也是 a，那么它的每一个侧面与底面所成的角是（　　）；

A. $30°$　　　B. $45°$　　　C. $60°$　　　D. $75°$

(4) 现在国际乒乓球比赛用球已由“小球”改为“大球”,“小球”的直径为38mm,“大球”的直径为40mm,则“小球”与“大球”的表面积之比为(　　).

A. $\sqrt{19}:\sqrt{20}$　　　B. $19:20$　　　C. $19^2:20^2$　　　D. $19^3:20^3$

2. 填空题:

(1) 正方体的一条棱长与一条对角线长的比为________;

(2) 正三棱锥的底面边长为6cm,侧面与底面所成的角为60°,则该棱锥的侧面积为________;

(3) 正三棱锥的侧棱长都是a,则它的表面积为________;

(4) 如果球的直径为d,那么它的体积是________.

***3.** 长方体底面的两邻边长分别为12cm和16cm,它的对角面是正方形,求这个长方体的表面积与体积.

阅读空间

祖暅原理

祖暅是南北朝时代杰出的数学家祖冲之的儿子，是一位博学多才的数学家．受父亲的影响，他从小就热爱科学，对数学具有特别浓厚的兴趣，祖暅终生读书专心致志，祖暅原理是关于球体体积的计算方法，这是他一生最有代表性的发现．他利用刘徽“牟合方盖”的理论去进行体积计算，得出“幂势既同，则积不容异”的结论．“势”即是高，“幂”是面积，意思是，两个等高的立体，若平行于底的截面积都相等，则它们的体积相等．这个原理就是祖暅原理．

这个原理很容易理解，取一摞书或一摞纸堆放在水平桌面上，然后用手推一下以改变其形状，这时高度没有改变，每页纸的面积也没有改变，因而这摞书或纸的体积与变形前相等．

在西方，球体的体积的计算方法虽然早已由希腊数学家阿基米得发现，但“祖暅原理”是在独立研究的基础上得出的，且比阿基米得的内容要丰富，涉及的问题要复杂，二者有异曲同工之妙．“祖暅原理”在1653年由意大利数学家卡瓦列利独立提出，但比祖暅晚了一千多年．

祖暅在利用“祖暅原理”推算球的体积公式的过程中还总结出了“两个等高的立体，若平行于底的截面积成比例，则体积也成比例”这个更为一般的结论．

归纳与总结

1. 知识要点

（1）平面的基本性质：

①公理 1：________________________________；

②公理 2：________________________________；

③公理 3：________________________________.

（2）直线、平面平行的判定与性质：

①________________________________叫做异面直线；

____

________________________________叫做两条异面直线所成的角；

________________________________叫做两条直线互相垂直；

②公理 4：________________________________；

③直线与平面的位置关系：________、________，________；

④直线与平面平行的判定定理：________________________________

________________________________；

⑤直线与平面平行的性质定理：________________________________

________________________________；

⑥平面与平面的位置关系：________，________；

⑦平面与平面平行的判定定理：________________________________

________________________________；

⑧平面与平面平行的性质定理：________________________________

________________________________.

（3）直线、平面垂直的判定与性质：

①________________________________叫做直线与平面垂直；

②直线与平面垂直的判定定理：________________________________

________________________________；

③直线与平面垂直的性质定理：________________________________

________________________________；

④________________________________叫做平面的斜线；

____

________________________________叫做斜线在这个平面上的射影；

________________________________叫做斜线与平面所成的角；

⑤________________________________叫做二面角；

________________________________叫做二面角的平面角；

________________叫做直二面角．

⑥________________叫做两个平面互相垂直；

⑦平面与平面垂直的判定定理：________________

________________；

⑧平面与平面垂直的性质定理：________________

________________．

（4）柱、锥、球及其简单几何体：

①多面体

多　面　体		
定　义	________叫做多面体	
名　称	棱　柱	棱　锥
定　义		
侧面积	$S_{直棱柱侧}=ch$ c 为底面多边形的周长， h 为高	
表面积	$S_{直棱柱表}=S_{直棱柱侧}+2S_{直棱柱底}$	
体　积	$V_{棱柱}=Sh$ S 是底面积，h 为高	

②旋转体

旋　转　体			
名　称	圆　柱	圆　锥	球
定　义			
侧面积			
表面积			
体积			

2. 重点与难点

本单元学习的重点是直线、平面平行与垂直位置关系的判定与性质；柱、锥、球的结构特征及面积与体积的计算．难点是空间想象能力的建立以及对

定理、公式的理解和运用.

学习本单元的内容需要注意理解以下几方面的问题:

(1) 加强培养空间想象能力,建立空间概念的训练

由于受学习平面几何形成的思维定式的影响,马上建立起空间概念会有一定的困难,因此在开始学习本章时,要注意摆脱过去平面几何思维习惯的约束,学会用空间想象力去观察、分析空间图形,加强这方面的练习,从而形成一种全新的思维习惯.例如:

在本单元开始的几节课中,要特别注意空间图形在平面内的画法,切不可把虚线误认为辅助线,要把平面图形中画出的角、线段与空间实例相对照.对于课本中给出的示范图,要真正理解,并在头脑中储存几个典型的图形,如异面直线画法、二面角画法、两个平面平行的画法等,这样在解题过程中,可依据需要,顺利画出符合题意的图形.

(2) 注意平面图形的性质与空间图形的性质之间的联系和区别

平面几何中的定义、定理,对空间图形中属同一平面内的情况下,都能适用.把空间图形的问题转化成平面图形的问题加以解决,是研究空间图形的重要思想方法.但不属于同一平面内的图形,则只有在经过证明后方可应用.有些平面图形的定理并不完全适用于空间图形.例如"垂直于同一条直线的两条直线平行"就不适用于空间的情形.又如异面直线所成的角、直线和平面所成的角、二面角的度量,都是转化为平面图形中的角来度量的,但与平面图形中两条直线所成的角又有区别.这可以看做角的概念的发展.

(3) 熟记简单几何体(棱柱、棱锥、球)的有关计算公式

棱柱、棱锥、球等形状的物体在生产、生活中很常见.它们的面积、体积的计算会经常用到.这也是我们学以致用的好机会.要牢记有关公式,使自己有能力解决一些实际生活工作中的问题.

例1 如图9-66,正四面体 $S-ABC$ 中,E,F 分别为 SC,AB 的中点,求异面直线 EF 与 SA 所成的角.

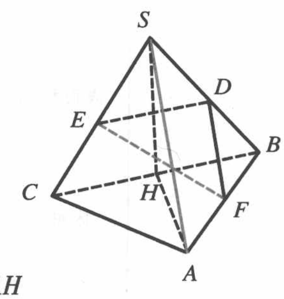


图9-66

解: 取 SB 的中点 D,连结 DE,DF.

则 $DE /\!/ BC$,且 $DE=\frac{1}{2}BC$,

$DF /\!/ SA$,且 $DF=\frac{1}{2}SA$,

$\therefore\ DE=DF$.

取 BC 的中点 H,连结 SH,AH.则 $SH\perp BC$,$AH\perp BC$,

$\therefore BC\perp$ 平面 SAH,

$\therefore BC\perp SA$.

$\therefore DE \perp DF$.

又$\because DE = DF$,

$\therefore \Delta DEF$ 是等腰直角三角形.

因此，$\angle DFE = 45°$,

$\because DF /\!/ SA$,

$\therefore \angle DFE$ 是异面直线 EF 与 SA 的所成的角,

即 异面直线 EF 与 SA 所成的角为 $45°$.

说明：本题也可以采用下述方法求解：

设 $S-ABC$ 的棱长为 a，则 $DE = DF = \frac{a}{2}$，$AE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$$EF^2 = AE^2 - AF^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2$$

$\because DE^2 + DF^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} = EF^2$,

$\therefore \Delta DEF$ 是等腰直角三角形.

因此，$\angle DFE = 45°$,

$\because DF /\!/ SA$,

$\therefore \angle DFE$ 是异面直线 EF 与 SA 的所成的角,

即 异面直线 EF 与 SA 所成的角为 $45°$.

例2 已知正方形 $ABCD$ 中，F，G 分别是 AB，BC 的中点，将 ΔDAF，ΔBGF，ΔCGD 分别沿 DF，FG，DG 向上折起，使 A，B，C 三点重合于一点，重合后的点记做 S，求证：$SD \perp$ 平面 SFG.

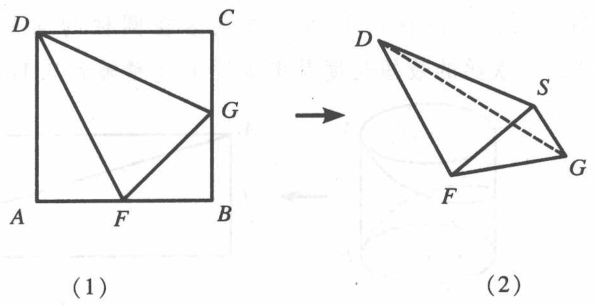


图 9－67

分析：画出原正方形 $ABCD$，折起后 A，B，C 三点重合于点 S，如图 9－67（2），那么 $\angle DAF$ 即 $\angle DSF = 90°$；$\angle FBG$ 即 $\angle FSG = 90°$；$\angle GCD$ 即 $\angle GSD = 90°$；所以 $SD \perp SF$，$SD \perp SG$，所以 $SD \perp$ 平面 SFG.

证明：在原正方形 $ABCD$ 中，

$AD \perp AF$，$CD \perp CG$.

所以，折起后 A、C 重合且记做 S，即

$SD\perp SF$，$SD\perp SG$.

因为 $SF\cap SG=S$，

所以 $SD\perp$ 平面 SFG.

说明：解决这类翻折问题时，一定注意翻折前直线与直线的位置关系、所成的角以及线段长度等在翻折后是否发生变化.

例3 已知正方形 $ABCD$ 的边长为4，将 ΔABD 沿对角线 BD 向上折起，使点 A 到达 A' 位置，当二面角 $A'-BD-C$ 为 $60°$ 时，如图9－68，求 $A'C$ 的长.

分析：二面角的两个面都是等腰三角形，原正方形两条对角线的交点 O 是特殊点，$A'O\perp BD$，$CO\perp BD$，所以 $\angle A'OC=60°$ 是二面角 $A'-BD-C$ 的平面角，$\Delta A'OC$ 是等边三角形，已知 $AB=4$，所以 $A'C=CO=2\sqrt{2}$.

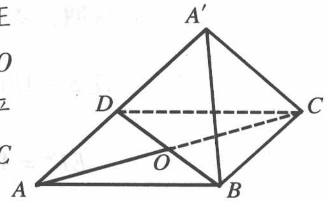


图9－68

解：$\because ABCD$ 是正方形，

$\therefore AC\perp BD$，

$\therefore A'O\perp BD$，$CO\perp BD$.

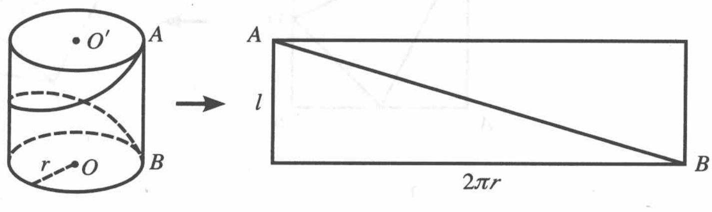
$\therefore \angle A'OC$ 就是二面角 $A'-BD-C$ 的平面角，即 $\angle A'OC=60°$.

又 $\because A'O=CO$，

$\therefore \Delta A'OC$ 是等边三角形，

$\therefore A'C=CO=2\sqrt{2}$.

例4 有一根长为5cm，底面半径1cm为的圆柱形铁管，用一段铁丝在铁管上缠绕一圈，并使铁丝的两个端点落在圆柱的同一母线的两端，如图9－69（1），则铁丝的最短长度是多少厘米（精确到0.1cm）？



（1）　　（2）

图9－69

分析：圆柱是空间图形，因此缠在圆柱表面的铁丝的长度不便于计算．如果我们能将这个问题放在平面中去解决，就简单多了．由于圆柱沿母线剪开后可以展开成平面图形，受此启发，我们沿铁丝的两个端点所在的母线将圆柱展开，如图9－69（2）所示．这样，本题就变成了求矩形的对角线的长度问题了．

解：沿铁丝的两个端点所在的母线将圆柱展开，展开后是一个矩形．

这个矩形的长为 $2\pi r=2\pi\times1=2\pi$（cm），宽为 $l=5$（cm）．

所以，矩形的对角线 $AB=\sqrt{(2\pi)^2+5^2}=\sqrt{4\pi^2+25}\approx5.9$（cm）．

即铁丝的最短长度大约是 5.9 厘米．

说明：这个例题的解答给了我们一个启示，即一些在空间图形中难于解决的问题，可以采取适当的方法转化成平面问题去解决，这是一个很重要的方法．本单元中的很多问题的解决都采取了这种方法，即空间问题平面化．

综合练习 九

A 组

1. 选择题：

（1）平面内一点与平面外一点的连线和该平面内直线的位置关系一定是（　　）；

A. 异面　　B. 相交　　C. 异面或平行　　D. 异面或相交

（2）下列可以确定一个平面的条件是（　　）；

A. 经过两点　　B. 经过三点

C. 经过不在一条直线上的三点　　D. 经过两条直线

（3）在一个平面内，与这个平面的斜线垂直的直线（　　）；

A. 只有一条　　B. 有无数条　　C. 不存在　　D. 有相交的两条

（4）满足下列条件（　　）的两个平面互相平行；

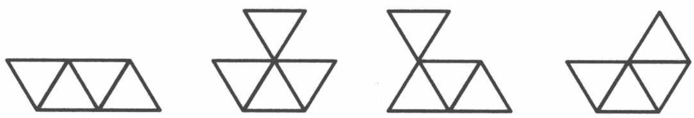
A. 两个平面与同一条直线平行

B. 两个平面与同一个平面垂直

C. 一个平面内的两条直线平行于另一个平面

D. 一个平面内的任意一条直线都平行于另一个平面

（5）有下列四个图形，其中各三角形都是全等的等边三角形：



①　　②　　③　　④

第 1（5）题

其中是正四面体表面展开图的是（　　）；

A. ①②　　B. ③④　　C. ①③　　D. ②④

（6）球的大圆面积若增大为原来的 16 倍，则球的表面积增大为原来的（　　）.

A. 4 倍　　B. 12 倍　　C. 16 倍　　D. 32 倍

2. 填空题：

（1）若 $\alpha\perp\beta$，$\beta\perp\gamma$，则平面 α 与 γ 的位置关系为________；

（2）平行于同一直线的一直线与一平面的位置关系为________；

（3）等边三角形 ABC 的边长为 $3a$，P 是 ABC 外一点，且 $PA=PB=PC=2a$，则 P 到平面 ABC 的距离为________；

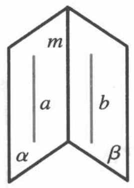
（4）长方体的两个相邻侧面的面积分别为 12cm^2 和 8cm^2，底面积为 6cm^2，则这个长方体的体积为________；

(5) 正四棱柱的一条对角线长为 5cm，高为 3cm，则底面边长为____________；

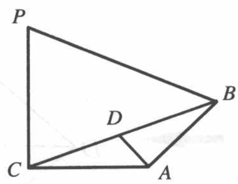
(6) 把表面积分别为 $36\pi cm^2$，$64\pi cm^2$，$100\pi cm^2$ 的三个铅球，熔化成一个大铅球，则这个大铅球的体积为____________.

3. 如图，已知 $\alpha \cap \beta = m$，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，且 $a /\!/ b$. 求证：$a /\!/ m$，$b /\!/ m$.

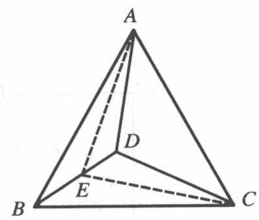
4. 如图，在 ΔABC 中，$AB = AC$，点 D 是 BC 的中点，PC 垂直 ΔABC 于所在的平面. 求证：$AD \perp$ 平面 PBC.



第 3 题



第 4 题



第 5 题

5. 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，E 是 BD 的中点，且 $AD = AB$，$BC = CD$. 求证：平面 $ABD \perp$ 平面 AEC.

6. 将长为 4，宽为 3 的矩形绕其一边所在的直线旋转一周，求所得的圆柱的侧面积和体积.

B 组

1. 选择题：

(1) 平行于同一条直线的所有直线（　　）；

A. 都相交　　B. 互相平行

C. 既不相交也不平行　　D. 都在同一个平面内

(2) 一条直线和平面所成的角为 θ，则 θ 的取值范围为（　　）；

A. $0° < \theta < 90°$　　B. $0° \leqslant \theta \leqslant 90°$

C. $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$　　D. $0° \leqslant \theta < 180°$

(3) 直线 a 与平面 α 斜交，则在平面 α 内与直线 a 垂直的直线（　　）；

A. 没有　　B. 有一条　　C. 有无数条　　D. α 内所有直线

(4) 若平面 $\alpha /\!/$ 平面 β，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，则直线 a，b 的位置关系是（　　）；

A. 垂直　　B. 平行　　C. 异面　　D. 不相交

(5) 若高为 3 的直三棱柱 $ABC - A'B'C'$ 的底面是边长为 1 的正三角形，则三棱锥 $B' - ABC$ 的体积为（　　）；

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(6) 圆柱的侧面展开图是正方形，这个圆柱的表面积与侧面积的比为

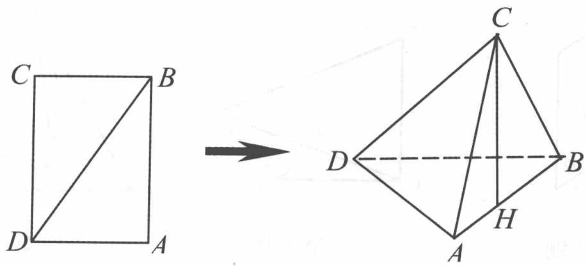
(　　).

A. $\dfrac{1+2\pi}{2\pi}$　B. $\dfrac{1+4\pi}{4\pi}$　C. $\dfrac{1+2\pi}{\pi}$　D. $\dfrac{1+4\pi}{2\pi}$

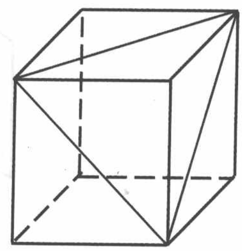
2. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，求证：平面 $A'BD$//平面 $B'CD'$.

3. 如图，四边形 $ABCD$ 是矩形，沿对角线 BD 将 BDC 折起，使 C 点在底面 DAB 内射影 H 恰好落在 AB 边上，且 $AD:AB=1:\sqrt{3}$.

求二面角 $C-AD-B$ 的正弦值.



第 3 题



第 4 题

4. 如图，将一个长方体沿相邻三个面的对角线截出一个棱锥，求棱锥的体积与剩下的几何体的体积之比.

5. 已知圆锥的表面积为 $a\text{m}^2$，且它的侧面展开图是一个半圆，求这个圆锥的底面直径.

6. 一个红色的正方体，棱长为4cm，将其分割成棱长为1cm的小正方体，问：

(1) 共得到多少个棱长为1cm的小正方体？

(2) 三面涂色的小正方体有多少个？

(3) 两面涂色的小正方体有多少个？

(4) 一面涂色的小正方体有多少个？

(5) 六个面均没有涂色的小正方体有多少个？

阅读空间

埃舍尔的数学艺术

1898 年出生在荷兰的埃舍尔，自称是一个“图形艺术家”，他专门从事木版画和平版画．他的家庭为他设想希望他将来能从事他父亲的建筑事业，但由于他对绘画和设计的偏爱，最终还是选择了从事图形艺术的职业．

规则的几何体，例如多面体，对埃舍尔而言具有特殊的魅力．他把它们作为许多作品的主题，并在许多作品中作为第二重要元素出现．仅仅只有五种多面体被称为理想多面体（即有 4 个三角形表面的正四面体、有 6 个正方形表面的正方体、有 8 个三角形表面的正八面体、有 12 个五边形表面的正十二面体、有 20 个三角形表面的正二十面体），埃舍尔在他的木版画“四个常规的几何体”中，把理想多面体中的 4 个匀称地交叉了，并使它们呈半透明状，以使每一个多面体可透过其他多面体而得以辨认．

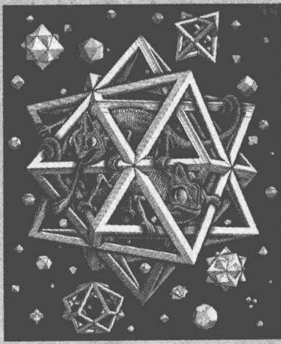


图 9－70

交叉的几何体常出现在埃舍尔的作品中，其中最有趣的是一幅木版画“星”（图 9－70）．这是一个由八面体、四面体、立方体和其他东西交叉构成的几何体．埃舍尔给了我们一种奇异的视觉刺激，使我们对他的画刮目相看．显然，数学家们对埃舍尔的作品颇为赞赏的另外原因是，所有伟大的数学发现背后都具有与此相同的感性和创意．

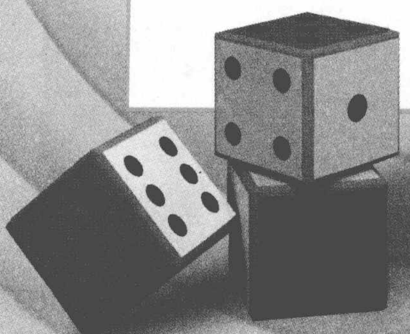
资料来源：易南轩，《数学美拾趣》，科学出版社，2006 年

第十单元　概率与统计初步

回顾与思考

从小学到初中，我们学习了象形统计图、条形统计图、折线统计图、扇形统计图等知识，并且能用简单的统计图表表示所获得的一些数据信息. 我们知道，在自然界和人类社会活动中，人们观察到的现象基本可以分为两种类型：一类是确定性现象，另一类是不确定现象或称随机现象. 例如，太阳总是从东方升起；常压下，水温达到100℃时水就会沸腾；一个人随着岁月的流逝，一定会衰老、死亡等都属于确定性现象；而向地面抛掷一枚硬币，观察其结果是正面向上还是反面向上；购买一张福利彩票，最后结果能否中奖；随机地找一户家庭调查其月收入是多少等，都是不确定现象.

这一单元我们将进一步学习概率与统计的一些基本知识，研究一些不确定现象发生的可能性的大小，研究如何根据不同的问题要求收集、整理、分析数据，以便从数据中提取有用的信息解决问题.



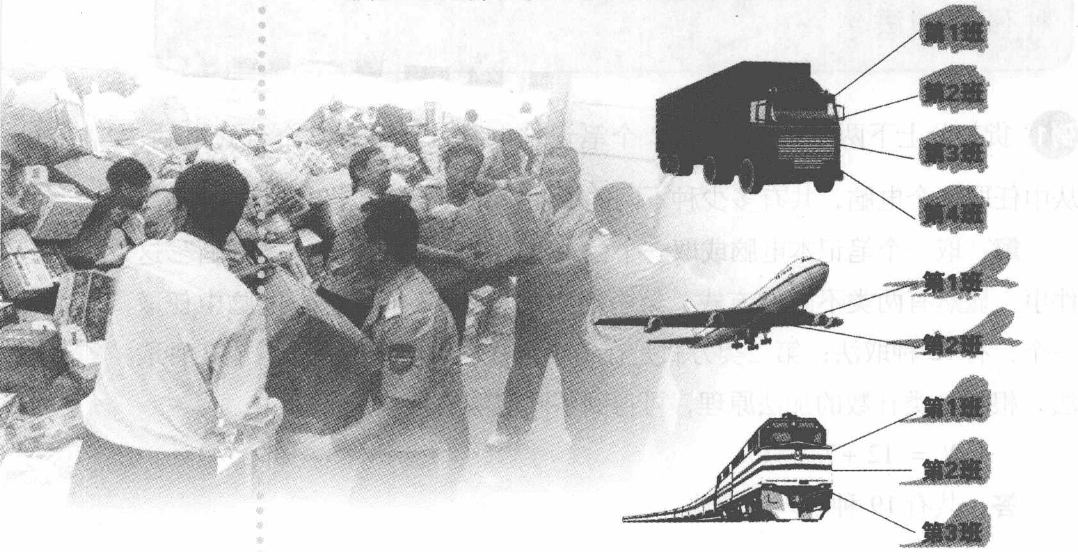
10.1 计数原理

1. 分类计数的加法原理

引例

由甲地到乙地运送物资，可利用运输机，火车或汽车三类方式．若一天里有 4 班汽车，2 班运输机，3 班火车，问一天中将物资从甲地运往乙地共有多少种不同的运输方法？

我们可以将各种不同的运输方法列成下表：



显然，上述每一种运输方法都可以直接完成将物资从甲地运送到乙地这项任务，可以看出，一天中完成这件事共有 3 类方式，第一类乘汽车，依时间有 4 种走法；第二类乘运输机，依时间有 2 种走法；第三类乘火车，依时间有 3 种走法．显然将物资从甲地运送到乙地共有不同走法的种数，恰好是三类走法的和，即

$$4+2+3=9$$

种不同的走法．

练一练

某火车站，进站台需要上楼，该车站有楼梯 4 座，电梯 2 座，自动扶梯 2 座．一位旅客要进站台，共有多少种不同走法？

进站台共有（　　）+（　　）+（　　）=（　　）种不同走法．

一般地，有如下原理：

分类计数的加法原理 做一件事，完成它可以有 n 类方式，在第一类方式中有 m_1 种不同的方法，在第二类方式中有 m_2 种不同的方法，…，在第 n 类方式中有 m_n 种不同的方法．无论通过哪类方式的哪种方法，都可以独立完成这件事，那么完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法．

例1 货架分上下两层，上层有 12 个笔记本电脑，下层有 7 个台式电脑，从中任取一个电脑，共有多少种不同的取法？

解：取一个笔记本电脑或取一个台式电脑都能完成“取一个电脑”这件事，显然有两类不同的方式，第一类方式是在 12 个笔记本电脑中任取一个，有 12 种取法；第二类方式是在 7 个台式电脑中任取一个，有 7 种取法．根据分类计数的加法原理，可得到不同取法的种数是

$$N = 12 + 7 = 19.$$

答：共有 19 种不同的取法．

议一议

会计一班有学生 50 人，其中男生 20 人，女生 30 人；会计二班有学生 56 人，其中男生 22 人，女生 34 人；会计三班有学生 60 人，其中男生 20 人，女生 40 人．

（1）从三个班中任选一名学生作为学生会干部候选人，有多少种不同选法？

（2）从会计一班，二班两个班的学生中选一名男生或从会计三班的学生中选一名女生到学生会文体部工作，有多少种不同选法？

思考与解答：（1）从三个班中任选一名学生作为学生会干部候选人，可以分三类方式完成：第一类方式是在会计一班的学生中选，有 50 种选法；第二类方式是在会计二班的学生中选，有 56 种选法；第三类方式是在会计三班的学生中选，有 60 种选法．根据分类计数的加法原理，可得到不同选法的种数是

$$N = 50 + 56 + 60 = 166.$$

（2）从会计一班，二班两个班的学生中选一名男生或从会计三班的学

生中选一名女生到学生会文体部工作，可以分三类方式完成：第一类方式是在会计一班的学生中选一名男生，有 20 种选法；第二类方式是在会计二班的学生中选一名男生，有 22 种选法；第三类方式是在会计三班的学生中选一名女生，有 40 种选法．根据分类计数的加法原理，可得到不同选法的种数是

$$N = 20 + 22 + 40 = 82.$$

加法原理与分类有关．如果完成一件事有 n 类方式，这 n 类方式彼此之间是相互独立的，不论哪类方式的哪种方法，都可以独立完成这件事，求完成这件事的方法种数，就用分类计数的加法原理．

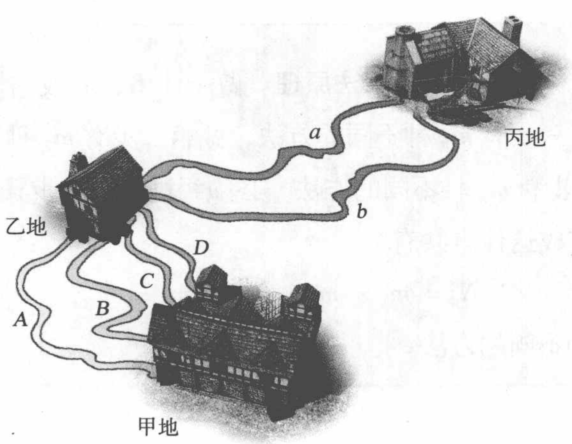
练习

1. 某班在一次校内职业技能大赛中有 5 名男生，4 名女生获奖，现从中任选 1 人去领奖，共有多少种不同的选法？
2. 在一次读书活动中，学校指定的书目包括不同内容的文学书 3 本，历史书 5 本，科技书 6 本，某学生从中任意选读 1 本，共有多少种不同的选法？
3. 某绣品厂有 10 名工人只会手绣，另外 6 名工人只会机绣，要找一个人绣窗帘，共有多少种安排方法？

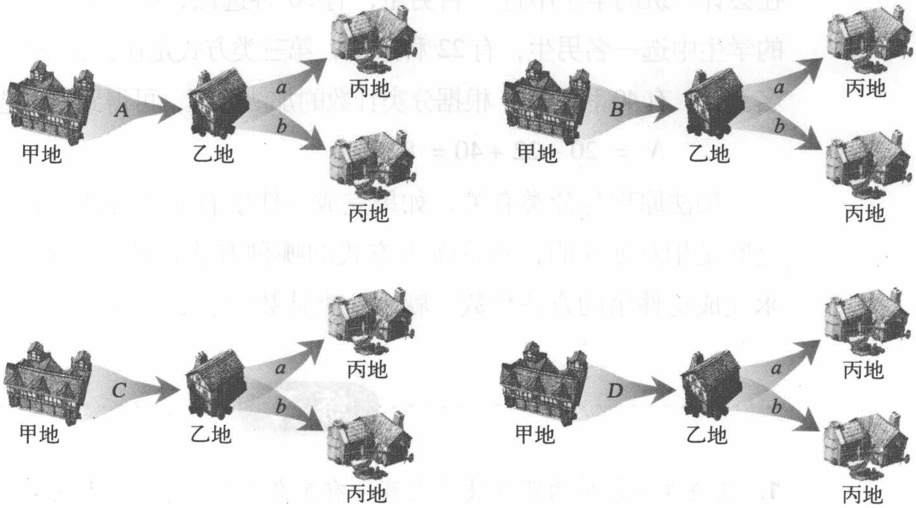
2. 分步计数的乘法原理

引例

如果从甲地到乙地的道路有 4 条，从乙地到丙地的道路有 2 条，那么从甲地经过乙地到丙地，共有多少种不同的走法？



各种不同的走法如下：



这里，从甲地到乙地有 4 种不同走法，按照这 4 种不同走法中的每一种走法到达乙地后再从乙地到丙地又有 2 种不同走法．因此从甲地经过乙地到丙地，共有

$$4\times2=8$$

种不同的走法．

试一试

将乘积 $(a_1+a_2)\cdot(b_1+b_2+b_3)\cdot(c_1+c_2)$ 展开后共有（　　）×（　　）×（　　）=（　　）项．

将这些项具体写出来，它们是________________________．

一般地，有如下原理：

分步计数的乘法原理　做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，…，做第 n 步有 m_n 种不同的方法．必须经过每一个步骤才能完成这件事，那么完成这件事共有

$$N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$$

种不同的方法．

例2 从甲，乙，丙 3 名篮球裁判中任选 2 名分别担任“男篮主裁判和女篮

主裁判”，共有多少种不同的选法？

解：要想完成“选男篮主裁判和女篮主裁判”这件事需要分成两个步骤：第一步在甲，乙，丙3 名篮球裁判中选出男篮主裁判，共有3 种方法；第二步在余下的两名篮球裁判中再选出女篮主裁判，共有 2 种方法，根据分步计数的乘法原理，得到不同的选法种数为

$$N = 3\times2 = 6.$$

答：共有6 种不同的选法．

乘法原理与分步有关．如果完成一件事需要分成 n 个步骤，各个步骤都不能缺少，且必须依次完成所有步骤，才能完成这件事，而完成每一个步骤各有若干方法．求完成这件事的方法种数，就用分步计数的乘法原理．

例3 由数字 1，2，3，4，5 可以组成多少个没有重复数字的两位偶数？

解法 1：要组成没有重复数字的两位偶数，可以有两类方式，一类是用 2 做个位数字，另一类是用 4 做个位数字．

当个位数字是 2 时，十位数字只能有 1，3，4，5 四种可能；

当个位数字是 4 时，十位数字只能有 1，2，3，5 四种可能．

根据分类计数的加法原理，能组成没有重复数字的两位偶数的个数是

$$N = 4+4 = 8.$$

解法 2：要组成没有重复数字的两位偶数，可以分成两步完成：先确定个位数字的可能个数，再确定十位数字的可能个数．

显然个位数字只有 2 和 4 两种可能．

不论 2 或 4 哪个做个位数字，十位数字都可以由余下的 4 个数字组成．

根据分步计数的乘法原理，组成没有重复数字的两位偶数的个数是

$$N = 2\times4 = 8.$$

答：由数字 1，2，3，4，5 可以组成 8 个没有重复数字的两位偶数．

说明：可以看出，对同一个问题，由于分析的角度不同，使用两个基本原理的情况也不尽相同．两个基本原理的共同点在于都是研究“做一件事”“共有多少种不同方法”，它们的区别在于一个与分类有关，一个与分步有关．

工具箱

偶数与奇数

整数中能被 2 整除的数叫做偶数．偶数的特征是其个位数字是 0，2，4，6，8 当中的一个．

整数中不能被 2 整除的数叫做奇数．奇数的特征是其个位数字是 1，3，5，7，9 当中的一个．

练习

1. 填空题［仿照第（1）小题做其余各小题］:

（1）某商店有5种上衣，4种裤子．某人要买上衣、裤子各一件，则共有 $\underline{\quad 5\times4 \quad}=\underline{\quad 20 \quad}$ 种不同的购买方法．

（2）阅览室有不同的科技杂志15本，不同的文艺杂志20本，不同的体育杂志8本．若从中取出科技、文艺、体育杂志各一本，可以有 ________ = ________ 种不同的取法．

（3）一名士兵两手各执一面红色信号旗，左手的旗可放在左上、左中、左下三个位置；右手的旗可放在右上、右中、右下三个位置．用两面旗可以表示 ________ = ________ 种不同的信号．

请你将用两面旗可以表示的不同信号具体写出来：

左手位置	
右手位置	

2. 由数字1，2，3，4，5可以组成多少个没有重复数字的两位数？

习题一

1. 一个口袋内有5个小球，另一个口袋内有6个小球，所有这些小球的颜色各不相同．

（1）从两个口袋内任取一个小球，有多少种不同的取法？

（2）从两个口袋内各取一个小球，有多少种不同的取法？

2. 从2，3，5，7这四个数中，任取两个不同的数．

（1）若相加，可得多少不同的和？

（2）若相减，可得多少不同的差？

3. 将乘积 $(a_1+a_2)\cdot(b_1+b_2+b_3)\cdot(c_1+c_2+c_3+c_4)$ 展开，共有多少项？

4. 从10个人中选出正副组长各一人，共有多少不同的选法？

10.2 随机事件与概率

观察与思考

现实世界中，你是否注意观察过下面这些现象：

(1) 向上抛一粒石子，其结果下落；

(2) 三角形内角和等于 180°；

(3) 掷一颗骰子，结果不可能出现 7 点；

(4) 一次数学考试某学生所得的分数；

(5) 测量零件长度产生的误差；

(6) 篮球运动员连续投篮 10 次，其命中的次数．

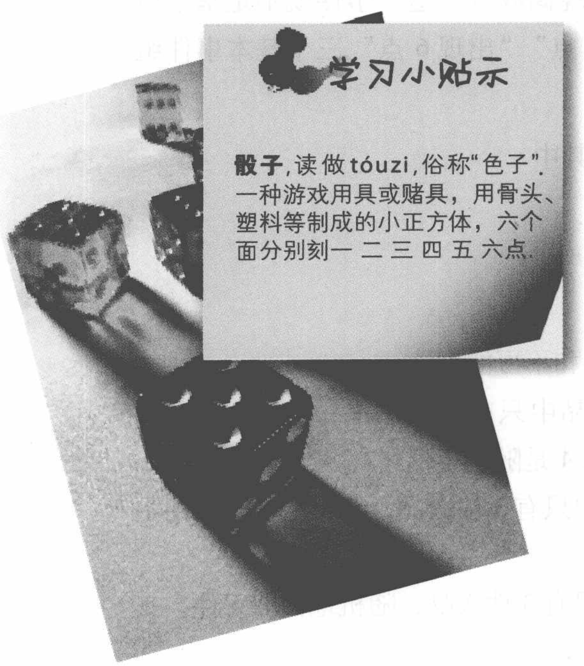
请你想一想前三个现象与后三个现象之间有区别吗？

1. 随机事件

自然界与科学实验中的各种现象，可以按照其结果的确定性与不确定性分为两类．

一类是**确定性现象**，即在一定条件下必然发生或必然不发生的现象，如“向上抛一粒石子，其结果下落”“三角形内角和等于 180°”“掷一颗骰子，结果不可能出现 7 点”等．

另一类是**随机现象**，是指在一定条件下，具有多种可能的结果发生，但事先无法确定究竟发生哪一种结果的现象．如“一次数学考试某学生所得的分数”“测量零件长度产生的误差”“篮球运动员连续投篮 10 次，其命中的次数”等．



学习小贴示

骰子，读做 tóuzi，俗称“色子”．一种游戏用具或赌具，用骨头、塑料等制成的小正方体，六个面分别刻一 二 三 四 五 六点．

为了更好地了解随机现象，我们可以做这样的试验：抛掷一枚质地均匀的硬币，只有在这枚硬币落稳在地面上时，我们才能指出其结果是正面朝上还是反面朝上；从一批灯泡中任取一个进行检测，考察其使用寿命，在结果出来之前我们不能断定它的寿命有多长．

上述试验中我们所看到的是一类事件，即在一定条件下可能发生也可能不发生的事件，我们称之为**随机事件**．而那些在一定条件下必然发生的事件叫做**必然事件**，在一定条件下必然不发生的事件叫做**不可能事**

件．通常用大写字母 A，B，C，…表示事件．

例如 从0，1，2，…，8，9这10个数字中任取一个，考察其结果：

令 A 表示“取得的数为0”，

B 表示“取得的数为5”，

C 表示“取得的数为偶数”，

D 表示“取得的数不超过6”，

M 表示“取得的数不小于0”，

N 表示“取得的数大于9”，

那么，这里的 A，B，C，D 等都是随机事件，M 是一个必然事件，N 是一个不可能事件．

显然，必然事件和不可能事件的发生都是确定性现象的结果，但它们又和随机现象有着密切的关系，即一个事件包括了一次试验的各种可能结果时，它就是一个必然事件，一个事件没有包括此试验的任何一种结果时，它就是一个不可能事件．

如果在一次试验中，一共可能出现 n 个结果，这 n 个结果出现的可能性都是一样的，而且其中任何两个都不可能同时发生，那么每一个结果都叫做一个**基本事件**，包含若干基本事件的事件叫做**复合事件**．

例如，掷一枚骰子，观察所出现的点数，“出现2点”“出现4点”“出现6点”等都是基本事件．而“出现偶数点”这一事件就不是基本事件，因为它是由“出现2点”“出现4点”“出现6点”三个基本事件组成的复合事件．

例1 设在50件产品中只有3件次品，其中

A 表示“随机地抽取1件是次品”．

B 表示“随机地抽取4件都是次品”．

C 表示“随机地抽取5件有正品”．

请指出其中的随机事件，必然事件和不可能事件．

解： A 是随机事件．因为50件产品中只有3件次品，随机地抽取1件，可能是次品，也可能是正品，所以 A 是随机事件．

B 是不可能事件．因为50件产品中只有3件次品，随机地抽取4件不可能都是次品，所以 B 是不可能事件．

C 是必然事件．因为50件产品中只有3件次品，随机地抽取5件，其中至少有2件正品，所以 C 是必然事件．

想一想

在上例中，如果 D 表示“随机地抽取 3 件都是次品”，那么 D 是随机事件、必然事件还是不可能事件？为什么？

例2 将一枚质地均匀的硬币抛掷两次，考察两次正、反面朝上的情况．

（1）写出所有的基本事件；

（2）如果 A 表示“第 2 次正面向上”，写出组成 A 的基本事件．

解：（1）将一枚质地均匀的硬币抛掷两次，考察两次正、反面朝上的情况，共有 4 个基本事件，它们是：

A_1 表示“正，正”；　　A_2 表示“正，反”；

A_3 表示“反，正”；　　A_4 表示“反，反”．

（2）A 表示“第 2 次正面向上”，组成 A 的基本事件是 A_1 和 A_3.

练习

1. 设在 100 件产品中有 3 件次品，现从中抽取 5 件进行检测，在抽检的结果中：

A 表示“恰有 3 件次品”；

B 表示“5 件都是次品”；

C 表示“5 件都是正品”；

D 表示“1 件正品，4 件次品”；

E 表示“至少有 2 件正品”．

请指出其中的随机事件，必然事件和不可能事件．

2. 抛掷一枚骰子，在其结果中

A 表示“出现偶数点”；

B 表示“不大于 6 的点”；

C 表示“出现 8 点”．

请指出其中的随机事件，必然事件和不可能事件．

3. 同时抛掷两枚骰子，考察结果中出现的点数，

（1）求这个试验中基本事件的个数；

（2）如果 A 表示“出现的点数之和为 8”，写出组成 A 的基本事件．

2. 频率与概率

随机事件在一次试验中是否发生具有不确定性，但是它的发生是否就无规律可言呢？人们通过长期研究发现，仅仅通过一、两次试验它的结果确实无法预料，但是在相同条件下的大量重复中，它发生的频率往往会呈现一定的规律性．概率论就是一个研究随机现象的规律性的数学分支．

学习小贴示

帕斯卡与费马

帕斯卡（Pascal，Blaise，1623.6.19—1662.8.19）是法国数学家、物理学家.与他同时代的费马（Fermat，Pierre de，1601.8.17—1665.1.12）是位法国业余数学家，有“业余数学家之王”的美誉.他们二人在通信的过程中共同讨论关于掷骰子赌博中的赌资分配问题，对早期概率论的发展颇有影响，被后人公认为概率论的创始人.

◎帕斯卡

为了探讨随机现象的规律性，历史上有很多数学家利用抛掷一枚均匀硬币的方法做试验，几个比较著名的试验结果如下：

试验者	布丰	费勒	皮尔逊	维尼
投掷次数 n	4040	10000	24000	30000
出现正面次数 m	2048	4979	12012	14994
频率 $\frac{m}{n}$	0.5069	0.4979	0.5005	0.4998

一般地，我们把事件 A 发生的次数与试验次数的比值$\frac{m}{n}$，叫做事件 A 发生的**频率**，记做

$$W(A)=\frac{m}{n},$$

其中 m 叫做事件 A 发生的频数．

显然，$0\leqslant W(A)\leqslant 1$.

从上述试验结果我们看到，尽管每个试验出现“正面朝上”的频率是无法事先确定的，但是大量重复试验时，出现“正面朝上”的频率却呈现一定的稳定性，即它总在 0.5 上下波动．

我们再看一个例子：

对某品种大豆进行发芽试验，抽取八批，试验结果如下：

试验序号	1	2	3	4	5	6	7	8
种子数 n	10	80	130	310	700	1500	2000	3000
发芽数 m	9	71	116	282	639	1339	1806	2715
发芽率 $\frac{m}{n}$	0.9	0.892	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

从表中可以看出，尽管每批试验的种子数不同，发芽数也有变化，但发芽率$\frac{m}{n}$却呈现一定的规律性，即它总在 0.9 附近摆动．

试一试

从一定高度按相同的方式让一枚图钉自由下落，图钉落地后可能钉尖朝上，也可能钉尖着地．大量重复试验时，观察“钉尖朝上”出现的频率的变化情况．

（1）每人重复20次，记录下“钉尖朝上”出现的次数．

（2）汇总每个人所得的数据，并将每个人的数据依次进行编号，分别得出前20次、40次、60次…试验出现“钉尖朝上”的频率．

（3）在直角坐标系中，横轴表示掷图钉的次数，纵轴表示试验中“钉尖朝上”的频率，将以上试验结果表示在坐标系中．

（4）观察出现“钉尖朝上”的频率的变化趋势，你会得出什么结论？

随机事件的频率是每次试验的具体结果，试验次数不同，频率可能会不同．但是通过我们的试验和前面的两个例子可以看出：在大量重复试验时，随机事件发生的频率具有“稳定性”——在一个“常数”附近摆动．

既然在大量重复试验时，事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 总是在某个常数附近摆动，我们就称这个常数为事件 A 的**概率**，记做 $P(A)$．

概率刻画了事件 A 发生的可能性的大小．

频率和概率是两个不同的概念，随机事件的频率与试验次数有关，而概率与试验次数无关，因为事件发生的可能性的大小是客观存在的．

在实际应用中，当试验次数足够大时，常常用频率近似代替概率，例如产品的合格率、人口的出生率、射击的命中率等．

例3 某射手在同一条件下进行射击，结果如下：

射击次数 n	10	20	50	100	200	500
击中靶心次数 m	5	9	23	51	98	247
$W(A)=\frac{m}{n}$						

（1）计算表中各次击中靶心的频率；

（2）这个射手射击一次，击中靶心的概率是多少？

解：（1）利用 $W(A)=\frac{m}{n}$ 计算，结果如下：

$$0.5,\ 0.45,\ 0.46,\ 0.51,\ 0.49,\ 0.494.$$

（2）这个射手射击一次，击中靶心的概率是0.5.

数学实验

利用计算机进行模拟试验

利用计算机电子表格软件（如 Excel）中的随机函数（RAND）可以对抛掷 10 次硬币这个概率试验进行模拟．RAND 函数返回大于等于 0 且小于 1 的均匀分布随机数，每次计算工作表时都将返回一个新的数值，其表达式为：RAND ()．

这种模拟的工作原理为：每次产生 10 个 0 或 1 的随机数（假设用“0”表示出现正面，用“1”表示出现反面），统计每次试验中是否正好出现 5 次正面和 5 次反面，也就是统计这 10 个随机数的和是否为 5. 重复这个试验 100 次或更多次，统计出现 5 次正面的次数占总试验次数的百分率．具体操作步骤如下：

(1) 新建一个电子表格文件，在 A1 的位置处输入：=INT（RAND（）+0.5），产生一个 0 或 1 的随机数，如图 10－1.

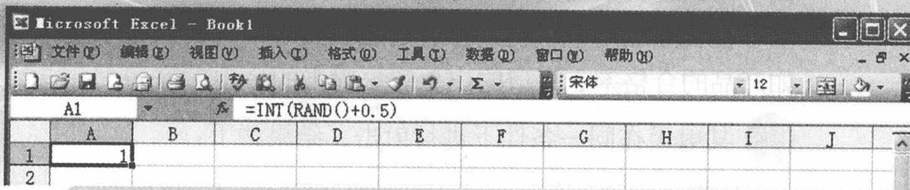


图 10－1

(2) 将 A1 位置的表达式分别复制到 B1 到 J1 处，这样就产生了 10 个 0 或 1 的随机数，如图 10－2.

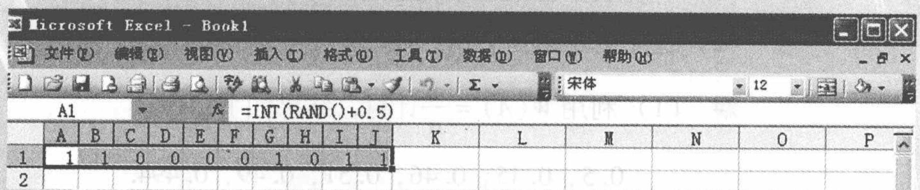


图 10－2

(3) 在 K1 位置处输入：=IF（SUM（A1:J1）=5，1，0），判断在 A1 到 J1 这些单元格里产生的 10 个随机数中是否正好有 5 个“1”和 5 个“0”，如果是，就返回数值 1，否则返回数值 0，如图 10－3.

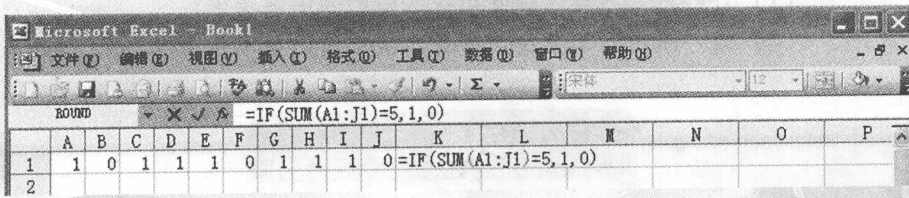
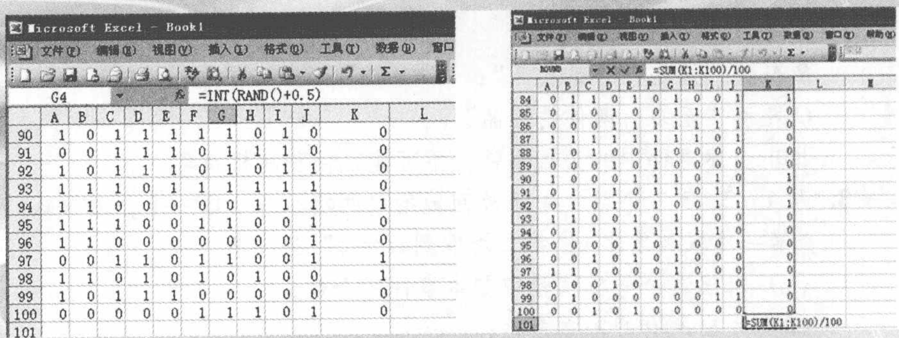


图 10－3

(4) 再将所在第 1 行的这 11 个表达式复制 100 行，产生 100 组这样的数据，也就是模拟 100 次这样的试验，并统计每次的试验结果，如图 10－4 (2)，理论值为：$C_{10}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=0.246\ 093\ 75$.



(1)　　　　　　　　　　　　(2)

图 10－4

注意　产生数据以后，只要对其中的任意一个单元格进行了操作就会重新产生一次随机数，也就是对数据进行了一次更新．对于试验而言，也就是重新产生 100 个随机数．这一点是非常重要的．一种最简单更新数据的操作就是，选中其中的任意一个单元格，然后按一次回车键就可以了．

练习

1. 在相同的条件下对某种油菜子的发芽情况进行试验，共抽取 310 粒油菜子，结果有 282 粒发了芽．若事件 A 表示："油菜子发芽"，求 $W(A)$.

2. 从一副 54 张的扑克牌中，抽出红桃的频率是多少？

3. 某工厂连续一周抽检采用新工艺的产品质量，结果如下：

日期	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日
生产的产品总数	60	150	350	600	900	1250	1700
次品数	7	19	31	52	99	120	165

（1）计算这七天每天抽查出现次品的频率是多少？
（2）该厂采用新工艺生产产品出现次品的概率是多少？

习题 二

1. 指出下列事件是必然事件，不可能事件，还是随机事件？
（1）如果 a，b 都是实数，那么 $a+b=b+a$；
（2）从一副扑克牌中，任取一张是黑桃；
（3）没有水分，种子发芽．

2. 设在 20 件产品中有 2 件次品，现从中抽取 3 件进行检测，在抽检的结果中：
A 表示“全是次品”；
B 表示“恰有一件是次品”；
C 表示“至多有两件是次品”．
指出上述事件中的必然事件，不可能事件和随机事件．

3. 从 1，2，3 三个数字中无放回地抽取两次，每次取一个，用 (x, y) 表示“第一次取到数字 x，第二次取到数字 y”这一事件．
（1）求出这个随机试验中基本事件的个数；
（2）列出所有的基本事件；
（3）“第一次取出的数字是 3”这一随机事件，由哪几个基本事件组成？

4. 有 4 件不同的产品，其中只有 1 件次品，从中一次抽取 2 件，考察抽出的两件产品的正、次品情况．
（1）写出所有的基本事件；
（2）若 A 表示“两次抽出的产品都是正品”，写出 A 中所有的基本事件．

5. 检测一批羽毛球的质量，情况如下：

抽取球数 n	10	100	400	500	1000	2000
合格品数 m	9	92	388	470	954	1902
$W(A)=\frac{m}{n}$						

（1）求出表中每次抽查的结果；
（2）这批羽毛球的合格率是多少？

***6.** 请自己设计一个利用计算机进行掷一枚骰子出现点数为奇、偶数的试验，观察出现“点数为偶数”的频率的稳定性．

阅读空间

布丰的投针试验

◎布丰

公元1777年的一天，法国科学家布丰（Buffon, Georges Louis Leclerc，1707.9.7－1788.4.16）的家里宾客满堂，原来他们是应主人的邀请前来观看一次奇特试验的．

试验开始，但见年已古稀的布丰先生兴致勃勃地拿出一张纸来，纸上预先画好了一条条等距离的平行线．接着他又拿出一大把原先准备好的小针，这些小针的长度都是平行线间距离的一半．然后布丰先生宣布："请诸位把这些小针一根一根往纸上扔吧！不过，请大家务必把扔下的针是否与纸上的平行线相交告诉我．"

客人们不知布丰先生要干什么，只好客随主便，一个个加入了试验的行列．一把小针扔完了，把它们捡起来又扔．而布丰先生本人则不停地在一旁数着、记着，如此这般地忙碌了将近一个钟头．最后，布丰先生高声宣布："先生们，我这里记录了诸位刚才的投针结果，共投针2212次，其中与平行线相交的有704次．总数2212与相交数704的比值为3.142．"说到这里，布丰先生故意停了停，并对大家报以神秘的一笑，接着有意提高声调说："先生们，这就是圆周率π的近似值！"

众宾哗然，一时议论纷纷，个个感到莫名其妙；"圆周率π？这可是与圆半点也不沾边的呀！"

为什么随意抛针实验会与圆周率π发生联系呢？我们先看一个假想的试验：

找一根铁丝弯成一个圆圈，使其直径等于二平行线间的距离d．那么，无论怎样扔下圆圈，都会和平行线有两个公共点（或者是两个交点或者是两个切点），如图10－5．如果扔n次，则圆圈与平行线相交$2n$个点次．如果把圆圈拉直成一根针．则针长$EF=\pi d$，这样，针EF与平行线相交的方式有：4

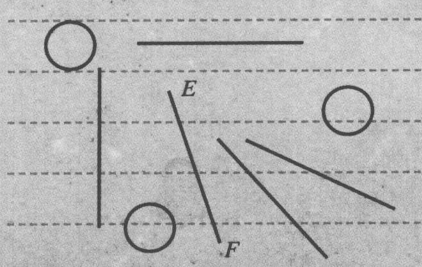


图10－5

个交点，3 个交点，2 个交点，1 个交点，0 个交点．由于这是随机过程的多次重复试验，总的可能性和它在圆周形式下相同．因而，将针 EF 扔 n 次，它与平行线相交乃 $2n$ 个点次．经过多次（数千次）重复试验，证实针 EF 与平行线相交点的次数 m 将随着试验次数增大，而逐渐向 $2n$ 逼近．如果用不同长度的针 l，l' 投掷，它们与平行线相交的次数与针 l，l' 的长度 l，l' 成正比．

由上可知，用针长为 l 的针与针长为 πd 的针 EF，分别投掷 n 次，则它们分别与平行线交点的次数 m 与 $2n$ 之比为 $\frac{m}{2n}=\frac{l}{\pi d}$，即 $\pi=\frac{2nl}{md}$，如果我们取 $l=\frac{d}{2}$，则有 $\pi=\frac{n}{m}=\frac{\text{投扔总次数}}{\text{碰线总次数}}$，这个试验的设计和公式，首先是由布丰在论文“或然性算术尝试”中提出的．

1901 年，意大利的拉兹里尼，使用长为 $l=0.83d$ 的针，投扔了 3408 次，求出 π 的近似值 3.1415929，准确到小数点后 6 位．这不但为圆周率的研究开辟了一条新路，并逐渐发展成为一种新的数学方法——统计试验法（又叫“蒙特卡罗方法”）．现在这个工作尽可全部交由计算机，在几秒钟之内便可完成．

10.3 概率的简单性质

根据概率的定义，容易得到概率的简单性质：

性质1 必然事件的概率等于1，不可能事件的概率等于0.

性质2 对于任何事件A，都有$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

我们把在一次试验中，不可能同时发生的两个事件叫做**互斥事件**，例如，我们掷一枚骰子，“1 点朝上”和“3 点朝上”这两个事件就不可能同时发生，因此，在掷一枚骰子的试验中，“1 点朝上”和“3 点朝上”这两个事件就是互斥事件．

我们把事件A发生或事件B发生，记做事件“$A+B$”发生．$P(A+B)$表示事件A或B发生的概率．

性质 3 如果A，B是互斥事件，那么$P(A+B)=P(A)+P(B)$.

例1 某运动员射击，命中 10 环的概率为 0.3，命中 9 环的概率为 0.5，那么他命中超过 8 环的概率多大？

分析：在一次射击中，“命中 10 环”和“命中 9 环”这两个事件不可能同时发生，因此它们是互斥事件．而“命中超过 8 环”发生，即“命中 10 环或命中 9 环”发生，所以求命中超过 8 环的概率适用于性质 3.

解：设A = “命中 10 环”，B = “命中 9 环”，则$A+B$ = “命中超过 8 环”．于是

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A)+P(B) \\ &= 0.3+0.5 \\ &= 0.8. \end{aligned}$$

答：他命中超过 8 环的概率为 0.8.

我们把在一次试验中，其中必有一个发生的两个互斥事件叫做**对立事件**．例如，在抛掷一枚硬币时，“正面向上”和“反面向上”这两个事件就是对立事件．因为它们首先是互斥事件，其次它们之中必有一个发生．

一个事件A的对立事件，通常记做$\overline{A}$，我们有

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

想一想 对立事件与互斥事件有什么关系?

这一性质告诉我们，两个对立事件的概率之和为1.

在实际解题中，我们经常用到上面公式的另一种形式:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

例2 某运动员射击，命中10环的概率为0.3，那么他命中低于10环的概率多大?

解:"命中低于10环"与"命中10环"显然是对立事件.

设A="命中10环"，则$\overline{A}$="命中低于10环". 于是

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - 0.3 \\ &= 0.7. \end{aligned}$$

答:他命中低于10环的概率为0.7.

练习

1. 判断下列每对事件是不是互斥事件，如果是，再判断它们是不是对立事件.

从一堆产品中任取2件，其中:

(1) 恰有1件次品和恰有2件次品;

(2) 至少有1件次品和全是正品;

(3) 至少有1件正品和至少有1件次品.

2. 写出下列事件的对立事件.

掷一枚骰子:

(1) 1点朝上;

(2) 偶数点朝上;

(3) 大于3的点朝上.

3. 某运动员射击，命中10环的概率为0.3，命中9环的概率为0.5，那么他命中低于9环的概率多大?

如果一个事件的发生与否对另一个事件发生与否没有影响，那么我们把这样的两个事件叫做**相互独立事件**．例如，甲，乙二人同时射击，甲是否击中目标对乙是否击中目标没有影响，同样，乙是否击中目标对甲是否击中目标也没有影响．这样，“甲击中目标”和“乙击中目标”这两个事件就是相互独立事件．

两个事件是否相互独立事件，一般要根据问题本身的性质由经验来判断．

我们把事件 A 与事件 B 同时发生，记做事件“$A \cdot B$”发生．$P(A \cdot B)$ 表示事件 A 与 B 同时发生的概率．

性质 4　如果 A，B 是相互独立事件，那么 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

例3 甲，乙二人各进行一次射击，如果甲击中目标的概率是 0.6，乙击中目标的概率是 0.7，求二人都击中目标的概率．

分析： 甲，乙二人各进行一次射击，他们当中不管谁击中与否，对另一个人击中目标与否都没有影响．因此，可以断定“甲射击一次，击中目标”与“乙射击一次，击中目标”是两个相互独立事件，可以利用性质 4 求出它们同时发生的概率．

解： 记“甲射击一次，击中目标”为事件 A，“乙射击一次，击中目标”为事件 B，则“二人都击中目标”为事件 $A \cdot B$，由题意可知，事件 A 与 B 相互独立，所以

$$\begin{aligned} P(A \cdot B) &= P(A) \cdot P(B) \\ &= 0.6 \times 0.7 \\ &= 0.42. \end{aligned}$$

答： 二人都击中目标的概率为 0.42.

事实上，如果事件 A 与事件 B 相互独立，那么事件 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立．

练习

甲乙二人独立地解答一个问题，他们回答正确的概率分别为 0.2 和 0.25，求：

(1) 二人同时答对的概率；

(2) 只有一人答对的概率；

(3) 问题被解决的概率．

习题 三

1. 填空题：

(1) 事件 A，B 互斥，$P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，则 $P(A+B)=$________；

(2) 事件 A，B 为对立事件，$P(A)=0.1$，则 $P(B)=$________；

(3) 事件 A，B 为相对独立事件，$P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，则 $P(A\cdot B)$ $=$________．

2. 某地区的年降水量，在各个范围的概率如下：

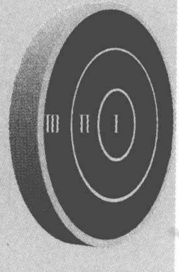
年降水量（毫米）	100 ~ 150	150 ~ 200	200 ~ 250	250 ~ 300
概率	0.12	0.25	0.16	0.14

(1) 计算年降水量在 100 ~ 200 毫米范围内的概率；

(2) 计算年降水量在 150 ~ 300 毫米范围内的概率；

(3) 计算年降水量不在 100 ~ 300 毫米范围内的概率．

3. 如图，圆形靶由一个圆和两个环形组成，在一次射击中，命中Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ部分的概率分别为 0.17，0.15 和 0.23，求没有命中靶子的概率．



第 3 题

4. 加工某产品需经两道工序，如果这两道工序都合格的概率为 0.94，求至少有一道工序不合格的概率．

5. 从一批乒乓球产品中任取一个，如果其重量小于 2.45 克的概率是 0.22，重量不小于 2.50 克的概率是 0.20，那么重量在 2.45 ~2.50 克 的范围内的概率是多少？

6. 棉花方格育苗，每格放两粒棉籽，已知棉籽发芽率为 0.90，求：

(1) 两粒同时发芽的概率；

(2) 恰有一粒发芽的概率；

(3) 两粒都不发芽的概率．

阅读空间

概率论的创立

17 世纪，正当研究现实世界中的必然现象及其规律的必然科学获得巨大发展的时候，一个研究偶然事件的数学分支也开始出现了，这就是所谓的或然数学．有趣的是，这样一门重要的数学分支竟然起源于对赌博问题的研究．

17 世纪中叶，法国贵族德·梅累在骰子赌博中，由于要紧急处理事情必须中途停止赌博，要靠对胜负的预测把赌资进行合理的分配，但不知用什么样的比例分配才算合理，于是就写信向当时的法国著名的数学家帕斯卡请教．正是这封信使概率论向前迈出了第一步．

帕斯卡和当时的第一流的数学家费马一起，研究了德·梅累提出的关于骰子赌博的问题．1654 年，帕斯卡和费马在通信中认真讨论了赌博中的概率问题．他们的信件被看做数学史上最早的概率论文献．

◎惠更斯

1657 年，惠更斯（Huygens，Christiaan 1629.4.14－1695.7.8）在帕斯卡与费马通信的基础上，发表了第一篇关于概率论的正式论文——《论赌博中的计算》．他在文章中引进了“数学期望”这个重要概念：如果 p 表示一个人获得一定金额 s 的概率，那么 sp 称为他的数学期望．他还证明了：如果一个人获得金额 a 的概率为 p，获得金额 b 的概率为 q，那么他可以希望获得金额 $ap+bq$．在数学期望的基础上他解决了许多概率问题，他预见到这一新兴学科的强大生命力：“无论如何我都认为，只要仔细研究这个课题，读者就能发现，事情不仅与游戏有关，这里实在是打下了一个十分有趣而且宽广的理论的基础．”

一个新的数学分支——概率论登上了历史舞台．其实这一问题的萌芽还可以追溯到 16 世纪，意大利数学家卡当（Cardan，Girolama，1501.9.24－1576.9.21）．他曾计算过两颗或三颗骰子掷出后，某一预想总点数的机会问题．卡当还专门撰写过一本题为《论赌博》的著作，不过此书一直到卡当死后于 1663 年才出版，此时帕斯卡等人对分配赌资问题的研究已取得了突破性的进展．

概率论作为一个新的数学分支，从赌博的游戏开始，但是促进它迅速发

展的直接动力来自保险业的需要．18 世纪的欧洲，工商业迅速发展，保险业开始兴起．保险公司为了获取丰厚的利润，必须预先确定各类意外事件发生的概率，据此来确定保险价格．数学家们就从这类问题着手去探求偶然现象中的数学关系，确立了概率论的基本内容．

由于概率论在天文学、物理学等学科以及保险理论、人口统计、射击理论、年度预算、产品检验等方面的应用，很快引起了众多数学家的关注，概率论的发展也随之进入了一个崭新的阶段．从 16 世纪到现在，概率论的发生和发展过程大致可分为四个阶段：方法积累，理论概括，系统整理和公理体系完成．由于随机现象在现实世界中大量存在，随着科学技术和社会实践的发展，以概率论为基础的或然数学将越来越显示出它巨大的威力．

10.4 直方图与频率分布

在日常生活中，我们随处都可以看到各种各样的数据，如股市的涨跌、天气的变化、人口的分布、商品的供求等等．面对这些纷繁复杂的数据，从中获得所需要的信息是非常重要的．统计学就是研究如何收集、整理、分析数据的学科，它可以帮助我们从数据中提取有用的信息，并为制定决策提供依据．本单元从这一节开始，我们将进一步学习有关统计的知识内容．

议一议 在小学和初中我们学习过哪些用图表表示数据分布的方法？

在学习、工作和生活中，我们常常需要利用统计的方法对数据进行整理和分析．列频率分布表，画频率分布直方图是对数据进行加工整理的两种基本方法．

学习小贴示

从小学到初中，我们学习了利用象形统计图、条形统计图、折线统计图、扇形统计图来表示数据．

频率分布表可以清楚地反映数据的分布规律，**频率分布直方图**可以将频率分布表中反映出来的规律直观形象地表示出来．

下面，我们结合一个实例介绍列频率分布表，画频率分布直方图的方法步骤．

例 为了了解某年级学生的数学学习状况，从期末考试的试卷中随机抽取40份，成绩如下：

70，85，92，86，89，95，84，79，63，72，
78，60，100，97，59，83，66，67，79，60，
74，77，98，65，73，82，65，99，76，93，
79，77，81，84，99，88，89，93，55，87.

列出频率分布表，并画出频率分布直方图．

解： 我们按以下步骤进行编制：

第一步：计算极差

将这些数值由小到大排列（相同数值只写一个，并标明出现次数），由此可得出最大值与最小值的差——统计中叫做**极差**，本例中，极差为

$100-55=45$（分）．

算出了极差就知道了这组数据变动的范围有多大．

第二步：决定组距与组数

将一批数据分组，一般数据越多，分的组数也越多．当数据在 100 个以内时，通常按数据的多少分成 5—12 组．本例中，40 个数据可分成 6 组，所以，组距 $=\dfrac{\text{极差}}{\text{分组数}}=\dfrac{45}{6}=7.5$，取整数，组距可定为 8 分．

第三步：确定各组分点

确定各组分点有两个原则，一是要把全部数据包括在组内；二是每个数据要在一个确定的组内．本例中，若第一组以 55 分为起点，则 63 分恰好是个分点，那么63 分属于第一组还是第二组就不确定，若以 54 分或 53 分为起点，也会遇到同样的问题．所以，我们可以把分点取小数，如第一组取 53. 5—61. 5 分，后面各分点依次递增 8 分，就不会出现上面的矛盾了．

第四步：列频率分布表

分组	频数	频率
53. 5—61. 5	4	0. 100
61. 5—69. 5	5	0. 125
69. 5—77. 5	7	0. 175
77. 5—85. 5	10	0. 250
85. 5—93. 5	8	0. 200
93. 5—101. 5	6	0. 150
合计	40	1. 000

第五步：绘频率分布直方图

频率分布直方图如图 10－6 所示．

其中横轴表示考试成绩，纵轴表示频率与组距的比值，可以看出：

$$\text{小长方形的面积}=\text{组距}\times\frac{\text{频率}}{\text{组距}}=\text{频率}.$$

就是说，各个小长方形的面积等于相应各组的频率．这样频率分布直方图就以图形的面积形式反映了数据落在各个小组内的频率大小．

工具箱

将数据按要求分成若干组，各组内数据的个数叫做该组的**频数**．

一个组的频数除以数据总个数所得的商为该组的**频率**．

在频率分布直方图中，由于各小长方形的面积等于相应各组的频率，而各组频率的和等于 1，因此各小长方形的面积的和等于 1.

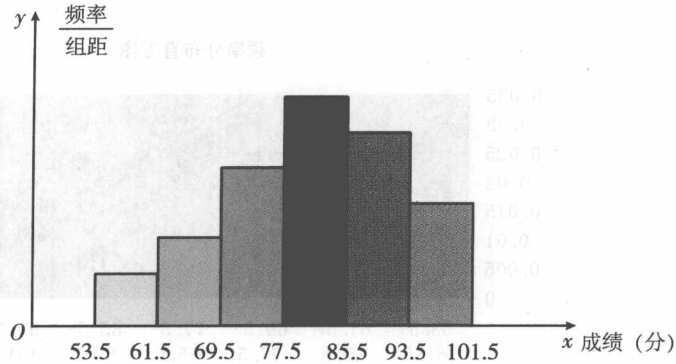
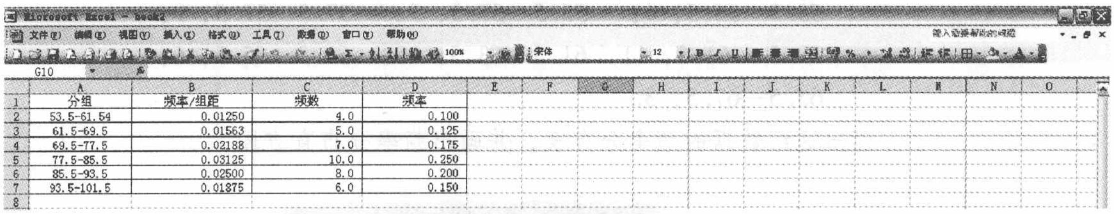


图 10－6

在这个例题中，我们还可以利用计算机中的 Excel 软件来做直方图，步骤如下：

第一步：在 Excel 表格中录入数据.

将制作频率直方图所需数据录入 Excel 表格中，如图 10－7 所示.



	A	B	C	D
1	分组	频率/组距	频数	频率
2	53.5-61.54	0.01250	4.0	0.100
3	61.5-69.5	0.01563	5.0	0.125
4	69.5-77.5	0.02188	7.0	0.175
5	77.5-85.5	0.03125	10.0	0.250
6	85.5-93.5	0.02500	8.0	0.200
7	93.5-101.5	0.01875	6.0	0.150
8				

图 10－7

第二步：做直方图.

用鼠标选中数据源区域，在菜单上选择命令［**插入**］/［**图表**］，在弹出的“图表向导－4 步骤之 1－图表类型”的界面中的“图表类型”框中选择柱形图，“子图表类型”中选择第一图.

单击［**下一步**］，在弹出“图表向导－4 步骤之 2－图表源”的界面中，先核对“数据区域”卡的数据区域框中的数据，并在“系列”卡中“行与列”中选择［**列**］.

单击［**下一步**］，在弹出“图表向导－4 步骤之 3－图表选项”的界面中，在“图表标题”框中键入“频率分布直方图”.

单击［**下一步**］，在弹出“图表向导－4 步骤之 4－图表位置”的界面中，单击［**完成**］.

右键单击图中小长方形，在弹出的菜单中单击“数据系列格式”中的“选项”，将“分类间距”设置为“0”，单击［**确定**］，则频率分布直方图如图 10－8 所示.

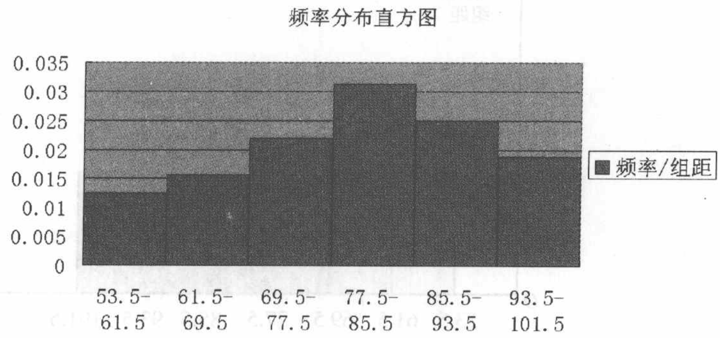


图 10-8

练习

对 50 个数据分组及各组的频数如下：

53.5—55.5，4； 55.5—57.5，7； 57.5—57.5，9；

59.5 —61.5，11 61.5—63.5，10； 63.5—65.5，6；

65.5—67.5，3.

列出这组数据的频率分布表，并画出频率分布直方图．

习题 四

1. 已知一组数据：

25，21，23，25，27，29，25，28，30，29，

26，24，25，27，26，22，24，25，26，28.

填写下面的频率分布表：

分组	20.5～22.5	22.5～24.5	24.5～26.5	26.5～28.5	28.5～30.5
频数					
频率					

2. 给出下列 50 个数据：

157，158，160，161，162，163，163，165，165，165，

166，166，166，166，166，167，167，167，168，169，

169，170，170，171，171，171，172，172，172，172，

172，173，173，173，173，174，174，174，174，175，

175，175，175，176，177，177，177，179，181，181.

（1）列出频率分布表；

（2）画出频率分布直方图；

（3）用 Excel 软件来实现．

10.5 总体与样本

当我们研究一个对象时，如果能得到它们的全部数据，我们就可以直接从数据中分析有关研究对象的各种信息．但是在实际问题中，往往得不到研究对象的全部数据信息，因此我们需要进行抽样调查，也就是抽取全部数据的一部分作为样本，并用样本的各种信息来估计研究对象全体的情况，包括它的分布和基本数字特征．

我们把被研究的对象的全体叫做**总体**，组成总体的每个对象叫做**个体**．例如：

（1）如果检查一批零件，那么整批零件就是总体，每个零件就是个体；

（2）如果要考察某中职学校一年级全体学生的学习成绩，那么全体学生的学习成绩就是总体，每个学生的学习成绩就是个体；

（3）如果要考察某灯泡厂生产的灯泡的使用寿命，那么该厂生产的所有的灯泡的使用寿命就是全体，每个灯泡的使用寿命就是个体．

练一练　请举几个生活生产中有关总体与个体的例子．

在统计学中，研究某一总体，并不是研究它的物理性能或化学特性，而是研究它的数量特征，所以总体总是用某些数据表示出来，如前边所讲的学生学习成绩、灯泡的使用寿命都是用数据表示的，至于检查产品，如果我们只考察它是正品还是次品，可以用“0”代表正品，用“1”代表次品．这样看来，总体就是某些数据的集合．从总体中抽取一部分个体，就形成了一个**样本**．样本中所包含的个体的数目叫做**样本容量**．例如：

（1）为了检查一批零件，我们从中抽取100件做实验，这时，整批零件是总体，其中100件是样本，其样本容量是100.

（2）为了考察高一年级全体学生的学习成绩，我们从中抽取50名学生的学习成绩进行观察．这时，全年级学生的学习成绩是总体，其中50名学生的学习成绩是样本，其样本容量为50.

（3）为了研究灯泡厂生产的灯泡的使用寿命，我们取出200个灯泡做试验，这时全体灯泡的使用寿命是总体，其中200个灯泡的使用寿命是样本，其样本容量是200.

练一练 请举几个样本与样本容量的例子.

练习

1. 某苗圃要了解一块试验田中的幼苗的高度，随机抽取10株进行考察．这时，总体是指____________，个体是指____________，样本是指____________，样本容量是______.
2. 为了考察高三年级全体学生的身高，我们从中抽取40名学生对其身高进行测量．这时，总体是指____________，个体是指____________，样本是指____________，样本容量是______.

10.6 抽样方法

在用样本估计总体时，为了使样本能尽量客观公正地反映总体，抽取的样本必须具有代表性，避免人为的主观偏向．因此，我们在抽取样本时应该遵循总体中的每一个个体有同等的机会被抽出的原则．抽样的方法有很多，每个抽样方法都有各自的优点与局限，关键是要针对问题选择适当的抽样方法．

下面我们来介绍三种常用的抽样方法．

1．简单随机抽样

议一议

如果你所在的学校打算开一些公共选修课，为了满足学生学习的需要，学校要调查学生希望设置什么课程，请帮助学校设计该如何抽样？

简单随机抽样包括**抽签法**和**随机数表法**．这种方法适用于总体中个体之间差异程度较小且数目较少的情况．

用抽签法抽取样本（样本容量为 k）的步骤是：

（1）对总体中的每一个个体编号；

（2）将每个编号写在形状，大小相同的号签上；

（3）将号签放在同一个箱中，并搅拌均匀；

（4）从箱中每次抽出一个号签，连续抽取 k 次；

（5）将总体中与号签的编号一致的 k 个个体取出．

用随机数表法抽取样本（样本容量为 k）的步骤是：

（1）对总体中的每一个个体编号（每个号码位数一致）；

（2）在随机数表中任选一个数字作为开始；

（3）从选定的数字开始按一定的方向读下去，若得到的数在编号中则取出，若得到的数不在编号中或前面已经取出，则跳过，如此继续下去，直到取够 k 个数为止；

（4）根据选定的号码取出个体．

工具箱

历史上，第一个随机数表《随机抽样数》是由英国统计学家梯培特（L. H. C. Tippett,）制作，并于1927年出版．

例1 为了了解某班 50 名学生的健康状况，从中抽取 10 名学生进行体检，如何抽取？

方法 1　抽签法

将全班 50 名学生从 1 到 50 进行编号，制作 50 个带 1 至 50 编号的号签，把 50 个号签集

中在一起充分混合并搅匀，从中任意抽取 10 个号码，这 10 个号码所对应的学生去进行体检．

方法 2　随机数表法

将全班 50 名学生按 01，02，…，50 进行编号，通过在随机数表中任意选取编号来选取学生．

下面的数表是随机数表的一部分．

1622779439	4954435482	1737932378	8735209643
8426349164	8442175331	5724550688	7704744767
2196335025	8392120676	6301637859	1695556719
0810507175	12867 35807	4 4395 23879	3 32 1123 429
786 456078 2	5 24 2074438	1551001342	9966927954
5760863244	0947279654	4917460963	9052847727

我们从中任选一个数字，例如从左数第 16 列，从上数第 4 行的数字，这个数字是 3，再选取其右边的数字，得到第一个编码 35，然后从左向右依次读数，并依照上述规则选取编码得到

35，43，23，32，11，42，45，25，24，20

这 10 个号码，可作为要抽取的 10 名学生的号码．

方法 3　用计算器

使用函数型计算器，依次按键 SHIFT $\boxed{\text{RAN\#}}$ 后，每按一次 = 键，就能得到一个 0 ~ 1 之间的随机数．我们取小数点后面的两位数作为抽取的号码，如果超过 50 或与前边的重复就舍去．这样，我们用计算器得到随机数

0. 087，0. 039，0. 753，0. 538，0. 133，0. 101，0. 442，0. 783，0. 124，0. 79，0. 385，0. 781，0. 749，0. 971，0. 193，0. 907，0. 875，0. 216，0. 532，0. 50.

所以抽到的学生的号码是

08，03，13，10，44，12，38，19，21，50.

2. 系统抽样

当总体中所含的个体较多时，采用随机抽样的方法比较麻烦，这时可采用系统抽样的方法：将总体中的个体进行编号并将总体分成均衡的几部分，按照简单随机抽样抽取第一个样本，然后按照相同的“间隔”抽取其他样本．这样，便从每一部分中抽取了一定数量的个体．当总体

中个体数较多，并且每个个体被抽到的概率相等时，经常采用系统抽样的方法．

例2 某工厂平均每天生产某种机器零件大约10000件，要求产品检验员每天抽取50件零件，检查其质量状况．假设一天的生产时间中生产机器零件的件数是均匀的，如何抽取检验样本?

解： 采用系统抽样法．

(1) 将一天中生产的机器零件按生产时间顺序进行编号．

(2) 按生产时间将一天分为50个时间段，则每个时间段大约生产 $\frac{10000}{50}=200$ 件产品．这时，200就是我们所要取得的"间隔"．

(3) 从第一时间段中按照简单随机抽样的方法，抽取一件产品，比如是76号零件．

(4) 从76号起，每隔200个号码抽取一个．顺序地抽取到编号分别为下面数字的50个零件：

$76, 76+200, 76+400, 76+600, \cdots, 76+9800.$

3. 分层抽样

当总体是由有明显属性特征的若干部分组成时，可将总体按其属性特征分成若干部分（有时称作层），然后按各部分所占的比例进行抽样，这种抽样叫做分层抽样．分层抽样对每一层进行抽样时，可采用简单随机抽样或系统抽样．

例3 某中职学校一年级招收新生1230人，其中机电专业640人，服装专业186人，计算机专业241人，商贸专业163人，现决定在新生入学后进行一次文化摸底测试，为了减少工作量，拟从全体新生中抽取150名参加测试，应怎样抽样?

分析： 由于各专业的学生之间文化基础有着较大差异，故不宜采用简单随机抽样和系统抽样，这时，可将总体按差异情况分成几部分，然后按各部分所占的比例进行抽样．为了保证分层抽样时，每个个体等可能地被抽取，必须使每层抽取的个体数满足下面的条件

$$n_i=n\cdot\frac{N_i}{N}\ (i=1, 2, \cdots, k),$$

其中 k 为层数，n 为抽取的样本容量，N_i 为第 i 层中个体的总数，N 为总

体的容量，n_i 为每层抽取的个数．

解：将一年级按专业分为四个部分：

在机电专业中抽取

$$150\times\frac{640}{1230}\approx78\text{（人）},$$

在服装专业中抽取

$$150\times\frac{186}{1230}\approx23\text{（人）},$$

在计算机专业中抽取

$$150\times\frac{241}{1230}\approx29\text{（人）},$$

在商贸专业中抽取

$$150\times\frac{163}{1230}\approx20\text{（人）}.$$

各专业抽取的人数确定后，可以采用简单随机抽样或系统抽样的方法抽取样本．将各专业中抽取的个体合在一起就组成了样本容量为 150 的样本．

练习

1. 填空题：

（1）从概率的角度来讲，抽取样本要遵循__________的原则．

（2）我们学习的随机抽样的三种方法是____________________．

（3）用随机数表法抽取样本（样本容量为 50）的步骤是：

①______________________________；

②______________________________；

③______________________________；

④______________________________．

2. 为了了解某班 40 名学生的健康状况，从中抽取 10 名学生进行体检，如何抽取？

习题 六

1. 下面的数表是随机数表的一部分.

1622779439	4954435482	1737932378	8735209643
8426349164	8442175331	5724550688	7704744767
2196335025	8392120676	6301637859	1695556719
0810507175	1286735807	4439523879	3321123429
7864560782	5242074438	1551001342	9966927954
5760863244	0947279654	4917460963	9052847727

(1) 请利用上表随机抽取 12 个小于 50 的随机数;

(2) 请利用上表随机抽取 10 个小于 80 的随机数.

2. 用计算器从 60 人中随机抽取 8 个人组成一个样本.

3. 某农场在两块地种有小麦，其中平地种有 100 亩，坡地种有 20 亩，现需要对 6 亩地的小麦进行估产，应如何抽样?

10.7 均值与标准差

在统计中，有两个特征数字可以对数据的情况作出简要的描述．均值可以显示数据的集中趋势；标准差可以显示数据的离散程度．

1. 均值

引例

某代表团的年龄如下：

56，37，45，51，39，47，49，45，28.

请问这个代表团的平均年龄是多少？

解：显然，这个代表团的平均年龄是

$$\frac{56+37+45+51+39+47+49+45+28}{9}=44.1\ (岁).$$

一般地，如果有 n 个数 x_1，x_2，…，x_n，那么

$$\boxed{\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

叫做这 n 个数的算术平均数，简称**均值**．如果这 n 个数是从总体中抽取的一个样本，那么 $\bar{x}$ 叫做**样本均值**．

> **学习小贴示**
> Σ 读做"西格玛"，求和符号，表示总和．

例1 某班共有 40 名学生，其中 16 岁的有 5 人，17 岁的有 30 人，18 岁的有 4 人，19 岁的有 1 人，计算这个班学生的平均年龄．（结果保留到个位）

解：我们可以这样计算：

$$\bar{x}=\frac{16\times5+17\times30+18\times4+19\times1}{40}\approx17\ (岁).$$

还可以这样计算：

$$\bar{x}=16\times\frac{5}{40}+17\times\frac{30}{40}+18\times\frac{4}{40}+19\times\frac{1}{40}\approx17\ (岁).$$

在这个式子里，$\frac{5}{40}$是 16 出现的频率，$\frac{30}{40}$是 17 出现的频率，$\frac{4}{40}$是 18 出现的频率，$\frac{1}{40}$是 19 出现的频率．因此每一个年龄数乘以相应的频率再相加，就是平均年龄了．

一般地，样本均值 $\bar{x}$ 等于样本中的每一个可能值分别乘上相应的频率然后相加，即

$$\bar{x}=x_1\cdot\frac{f_1}{n}+x_2\cdot\frac{f_2}{n}+\cdots+x_k\cdot\frac{f_k}{n}=\sum_{i=1}^{k}x_i\cdot\frac{f_i}{n}$$

练习

1. 从一批机器零件毛坯中随机取出 20 件，称得它们的质量如下（单位：千克）：

210	208	200	192	202	218	206	214	215	207
195	207	218	202	216	185	227	215	187	205

计算样本均值（结果保留到个位）.

2. 某校从一次收回的 3000 多份对学生的问卷调查中，随机抽取 20 份，问卷中有一项对自己的满意度评分．答卷中满意度评分如下：

50	30	60	80	70	60	80	50	60	60
70	40	50	80	60	70	50	60	50	60

（1）判断该校学生对自己的满意率（60 分及 60 分以上为满意）；

（2）计算样本均值．（结果保留到小数点后一位）

2. 标准差

引例

两台机床同时生产直径为 40 毫米的零件，从产品中各抽出 10 件进行测量，结果如下：

机床甲　40，39.8，40.1，40.2，39.9，40，40.2，39.8，40.2，39.8

机床乙　40，40，39.9，40，39.9，40.2，40，40.1，40，39.9

这两组数据的均值分别为

$$\bar{x}_{甲}=\frac{40+39.8+\cdots+39.8}{10}=40,$$

$$\bar{x}_{乙}=\frac{40+40+\cdots+39.9}{10}=40,$$

即这两组零件直径数据的均值都是 40 毫米．那么是否能说，在使零件的直径符合规定方面这两台机床加工的情况一样呢？

显然是不一样的，因为两组数据偏离它们的均值的程度有所不同．这一点，我们可以通过下面的计算得出：

$$S_{甲}=\sqrt{\frac{(40-40)^2+(39.8-40)^2+\cdots+(39.8-40)^2}{9}}\approx\sqrt{0.0289},$$

$$S_{乙}=\sqrt{\frac{(40-40)^2+(40-40)^2+\cdots+(39.9-40)^2}{9}}\approx\sqrt{0.0089}.$$

由于 $\sqrt{0.0289}>\sqrt{0.0089}$，数据显示了机床甲生产的零件直径与规定尺寸偏差较大，机床乙生产的零件直径与规定尺寸偏差较小.

一般地，一组数据 x_1，x_2，$\cdots x_n$，它们的均值为 $\bar{x}$，则

$$S=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

叫做这组数据的**标准差**. 它可以用来衡量一组数据的波动大小，标准差越大，说明这组数据波动越大.

如果这 n 个数是总体中抽取的一个样本，那么 S 叫做**样本的标准差**.

例2 从某总体中抽取一个容量为 5 的样本，测得样本数据为

217.3，218.1，219.4，221.5，220.1.

求样本均值和样本标准差.（保留小数点后两位）

解： $\bar{x}=\frac{1}{5}(217.3+218.1+219.4+221.5+220.1)$

≈ 219.28；

$S^2=\frac{1}{4}[(217.3-219.28)^2+(218.1-219.28)^2+(219.4-219.28)^2+(221.5-219.28)^2+(220.1-219.28)^2]$

≈ 2.73；

$S=\sqrt{2.73}\approx 1.65.$

答： 这组样本的均值为 219.28，标准差为 1.65.

练习

1. 计算下列各样本的均值及标准差：（结果保留到小数点后两位）

（1）1，5，6；

（2）-1，2，0，-3，-2，3，0，1.

2. 从小麦地里抽取了甲，乙两种小麦各10株，测得各株高如下（单位：厘米）：

甲：76，90，84，86，81，87，86，82，85，83；

乙：82，84，85，89，79，80，91，89，79，74.

哪种小麦长得比较整齐？(结果保留到小数点后两位)

习题 七

1. 填空题：

(1) 样本101，1，3，99，108，97，113，93的均值为________；

(2) 一个班共有50名学生，其中30名男生平均身高1.62米，20名女生平均身高1.51米，那么这个班平均身高________米；

(3) −6，0，6这三个数的均值是________，标准差是________.（精确到0.01米）

2. 甲，乙二人各5次60米短跑成绩如下（单位：秒）：

甲：10.1，8.9，9.3，9.5，8.7；

乙：9.0，9.7，8.9，8.8，10.1.

请问甲，乙二人谁的成绩稳定些？(结果保留到小数点后两位)

3. 甲，乙两台机床同时生产一种零件，在10天中，两台机床每天出的次品数分别是：

甲：0，1，0，2，2，0，3，1，2，4；

乙：2，3，1，1，0，2，1，1，0，1.

分别计算它们的均值与标准差．从计算结果看，哪台机床的性能较好？(结果保留到小数点后两位)

10.8 用样本估计总体

在实际工作中，由于总体的庞大与复杂，对它直接进行研究，认识与掌握其数据的变化规律和数字特征，往往不便进行，因此常常需要借助于样本进行研究，并利用对样本的研究所得到的信息，作出关于总体的推断与估计.

通常，我们利用样本的均值去估计总体的均值，利用样本的标准差去估计总体的标准差，在样本容量很大时，这种估计是比较准确的.

例如为了了解全市中职一年级学生的数学学习情况，对一次统一测验中的1000份试卷进行了统计，算得其均值为76分，标准差为4.81，那么我们就可以认为全市的中职一年级学生的这次统测平均分大约为76分，标准差大约为4.81.

例 某工厂生产某种零件，从一天的产品中随机抽取8件，量得内径尺寸如下（单位：毫米）：

15.3，14.9，15.2，15.1，14.8，14.6，15.1，14.7

试估计该工厂这天生产的全部零件内径的均值及标准差.（结果保留到小数点后两位）

解法1：$\bar{x}=(15.3+14.9+15.2+15.1+14.8+14.6+15.1+14.7)$
$\approx 14.96.$

$$S^2=\frac{1}{7}[(15.3-14.96)^2+(14.9-14.96)^2+(15.2-14.96)^2+(15.1-14.96)^2+(14.8-14.96)^2+(14.6-14.96)^2+(15.1-14.96)^2+(14.7-14.96)^2]\approx 0.063.$$

$$S=\sqrt{0.063}\approx 0.25.$$

答：这些零件内径的均值约为14.96毫米，其标准差约为0.25.

当样本容量很大时，计算显得比较麻烦，这时，我们可以借助于计算器．下面我们以本例为例介绍一下用计算器* 计算均值和标准差的方法.

开机后，按 MODE 2 键选择STAT模式，进入统计状态；按 1 键选择单一变量1 - VAR；进入STAT编辑屏幕键入每一个数据，如图10-9所示，每输入一个数据，按一次 = 键；

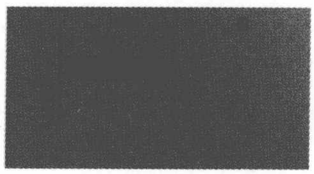


图10-9

* 本书涉及计算器使用的内容，均采用卡西欧 $fx-82ES$ 型计算器作演示说明.

当所有的数据都键入后，按 AC 键，即可进入 STAT 计算屏幕；按 SHIFT 1 5，进入 Var 子菜单，按 2 = 即可显示已输入数据的均值，按 SHIFT 1 5，进入 Var 子菜单，按 4 = 即可显示已输入数据的标准差．

解法 2：计算步骤如下：

第一步：按 MODE 2 1；

第二步：输入 15. 3 = 14. 9 =…15. 1 = 14. 7 =；

第三步：按 AC 键；

第四步：按 SHIFT 1 5 2 =，即可求得均值；

第五步：按 SHIFT 1 5 4 =，即可求得标准差．

解法 3：在这个例题中，我们还可以利用 Excel 软件来计算均值和标准差，如图 10－10，步骤如下：

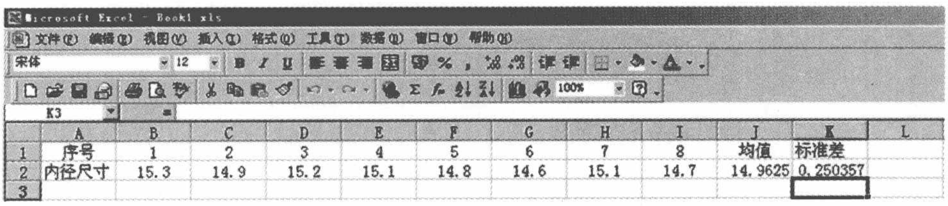
第一步：将样本数据录入 Excel 表格中．

第二步：计算均值．

用鼠标选中 J2，输入公式“＝AVERAGE(B2:I2)”，按回车键，得均值 14. 9625.

第三步：计算标准差．

用鼠标选中 K2，输入公式“＝STDEV（B2：I2)”，按回车键，得标准差 0. 250357.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	序号	1	2	3	4	5	6	7	8	均值	标准差	
2	内径尺寸	15.3	14.9	15.2	15.1	14.8	14.6	15.1	14.7	14.9625	0.250357	
3												

图 10－10

练 习

在一批零件中随机抽取 10 个，其尺寸与规定尺寸的偏差如下（单位：微米）：

+2　+1　−2　+3　+2　+4　−2　+5　+3　+4

试计算这批零件的尺寸偏差的均值和标准差．（结果保留到小数点后一位）

习题 八

1. 从所有参加语文考试的学生中抽取30名学生的成绩，分数如下：

90	84	84	86	87	98	78	82	90	83
68	95	84	71	78	61	94	88	77	100
70	97	85	68	99	88	85	92	93	97

求所有参加语文考试的学生的平均成绩．(结果保留到小数点后一位)

2. 从某厂生产的轴中，随机抽取15根，测得它们的长度（单位：毫米）如下：

422.2	423.1	428.2	417.2	431.5
413.5	425.6	438.3	441.3	420.3
434.0	423.0	425.8	412.3	418.7

试估计本厂生产的轴长的均值和标准差．(结果保留到小数点后两位)

10.9 一元线性回归

在现实世界中，变量之间相互依赖，相互制约的关系可大致分为两类：一类是函数关系，即变量之间存在着确定的关系，如圆的面积 S 与半径 r 之间存在的关系是 $S=\pi r^2$. 另一类是相关关系，如人的身高与体重．一般说来，人的身高越高，体重越重，二者确有关系．但是身高相同的人，体重却不一定相同，因此二者之间的关系不是函数关系，变量之间的这种非确定性的关系，叫做**相关关系**．

对于相关关系，虽然不能求出变量之间精确的函数关系式，但是通过大量的观测数据，可以发现它们之间存在着一定的统计规律性．应用统计方法，寻求一个数学公式来描述变量间的相关关系所进行的统计分析叫做**回归分析**，其中最简单最常用的就是只含有两个变量的一元线性回归．

对变量 y 与 x 做 n 次独立观测，得到 n 对观测值（x_i，y_i）（$i=1$，2，…，n），把它们标在直角坐标系中，就得到 n 个点（这种图叫做散点图），如果这些点大体散布在一条直线的周围，我们就称变量 y 与 x 之间是线性相关的．此时我们可以利用一条直线来近似表示它们之间的关系．我们把这条直线叫做**回归直线**．

假设这条直线方程为 $\hat{y}=a+bx$. 当然，我们希望这条直线在某种意义下是最好的，即它能最好地用反映散点分布的位置和趋势．在数学中，我们可以利用 $(y_i-\hat{y}_i)^2$ 即 $[y_i-(a+bx_i)]^2$ 来描述点与回归直线沿平行于纵轴方向的远近距离，则

$$Q(a,b)=\sum[y_i-(a+bx_i)]^2$$

就定量地描述了回归直线与 n 个观测点总的接近程度．要找出一条直线，使得它在总的程度上最接近这 n 个观测点，就是要找出使 Q 达到最小值的 a，b 的值，我们记做 $\hat{a}$，$\hat{b}$.

当 $\hat{a}$，$\hat{b}$ 为下列值时，所得回归直线最好：

$$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x},\quad \hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}.$$

其中，$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$，此时 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 叫做**线性回归方程**．

例 某种合成纤维的强度 y 与其拉伸倍数 x 有关，下表是 10 个纤维样品的强度与相应的拉伸倍数的实测记录. 根据这些数据寻找这两个变量的近似关系式. （结果保留到小数点后一位）

编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
拉伸倍数 x_i	2.0	2.1	2.7	3.5	4.0	5.0	6.5	7.1	8.0	9.0
强度 y_i（牛顿/毫米^2）	13	18	25	30	40	55	60	55	70	80

解法 1：以表中 10 对数据为坐标：

以 (2.0, 13)，(2.1, 18)，…，(9.0, 80) 这 10 对数据为坐标，在坐标系中描点，得散点图，如图 10－11 所示.

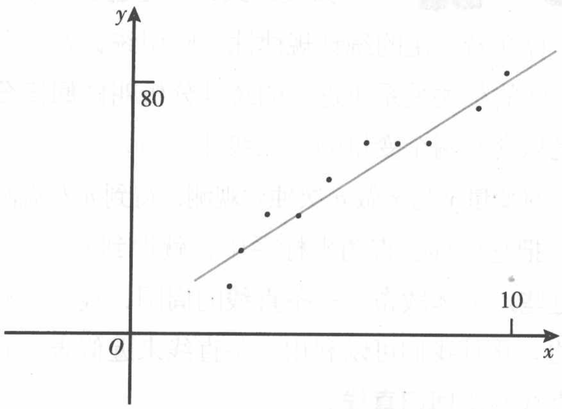


图 10－11

这些点大体散布在一条直线 l 的周围，因此考虑用直线 l 的方程来描述 y 与 x 的关系.

设这条直线方程为 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$.

由已知，得 $n=10$，$\bar{x}=4.99$，$\bar{y}=44.6$，$\sum_{i=1}^{10}x_i^2=306.61$，$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=2731.8$，则

$$\hat{b}=\frac{2731.8-10\times4.99\times44.6}{306.61-10\times4.99^2}=8.8,$$

$$\hat{a}=44.6-8.8\times4.99=0.7.$$

于是得到该种合成纤维的强度与其拉伸倍数的回归方程为

$$\hat{y}=0.7+8.8x.$$

解法 2：下面我们介绍用计算器计算回归方程的方法.

开机后，按 MODE 2 键进入 STAT 模式，进入统计状态；按 2 选择线性回归 A＋BX，进入 STAT 编辑屏幕；移动光标，键入各组数据，每输入一

个数据，按一次 = 键；当所有的数据都键入后，按 AC，即可进入 STAT 计算屏幕；按 SHIFT 1 7，进入 Reg 子菜单，按 1 = 即可显示 A 的值，按 SHIFT 1 7，进入 Reg 子菜单，按 2 = 即可显示 B 的值．

就本题而言，计算步骤如下：

第一步：设定线性回归计算状态，按 MODE 2 2；

第二步：输入数据输入 2.0 = 2.1 = …9.0 =，移动光标到 Y 列，输入 13 = 18 = …80 =；

第三步：按 AC 键，进入计算状态；

按 SHIFT 1 7 1 =，即可求得 A；

按 SHIFT 1 7 2 =，即可求得 B.

解法 3：在这个例题中，我们还可以利用 Excel 来做散点图及回归直线，如图 10－12，步骤如下：

第一步：在 Excel 表格中录入数据，并作散点图．

用鼠标选中数据源区域，在菜单上选择命令［**插入**］／［**图表**］，进入“图表向导”后，在“图表类型”选择框中选［*xy* **散点图**］，在“子图表类型”选择框中选第一类，然后单击［**完成**］．

第二步：做回归直线．

用鼠标右键点击散点中的任意一个散点，在弹出的快捷菜单中选择［**添加趋势线**］，弹出［**添加趋势线**］的选项界面．它有两张选项卡，在“类型”菜单界面中，选中“线性”；另一菜单界面是“选项”，从中选择显示趋势线的数学公式．完成两菜单界面的设置后，点击［**确定**］，散点中便会出现回归直线及它的数学表达式．

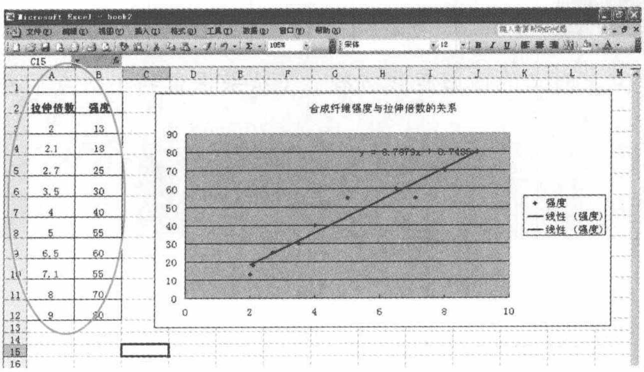


图 10－12

练习

人的身高与体重之间存在相关关系，下表中随机抽取了 8 名学生身高（单位：cm）与体重（单位：kg）的数据：

编号	1	2	3	4	5	6	7	8
身高 x	172	150	170	165	170	176	155	160
体重 y	70	47	70	60	72	70	51	60

请根据数据建立体重与身高的回归直线方程．（结果保留到小数点后两位）

习题 九

1. 以家庭为单位，某种商品的月需求量与该商品价格之间的一组调查数据为：

价格 x_i（元）	2	4	4	4.6	5	5.2	5.6	6	6.6	7
需求量 y_i（千克）	5	3.5	3	2.7	2.4	2.5	2	1.5	1.2	1.2

(1) 计算 $\bar{x}$；

(2) 计算 $\bar{y}$；

(3) 计算 $\sum\limits_{i=1}^{10} x_i^2$；

(4) 计算 $\sum\limits_{i=1}^{10} x_i y_i$；

(5) 计算 $\hat{a}$，$\hat{b}$；

(6) 写出 y 对 x 的回归直线方程．（结果保留到小数点后两位）

2. 对某矿体的 8 个采样进行测定，得到该矿体含铜量 x（‰）与含银量 y（‰）的数据如下：

x_i	37	34	41	43	41	34	40	45
y_i	1.9	2.4	10	12	10	3.6	10	13

建立 y 对 x 的回归直线方程．（结果保留到小数点后两位）

归纳与总结

1. 知识要点

(1) 计数的两个重要原理分别是__________原理和__________原理．

(2) 在随机试验中__________的结果叫随机事件，__________的结果叫必然事件，__________的结果叫不可能事件．

(3) 我们把__________叫做事件 A 发生的频率．

(4) 概率的定义是__________．

(5) 概率刻画了事件 A 发生的__________．

(6) 概率的简单性质是：

①__________；

②__________；

③__________；

④__________．

(7) 列频率分布表，画频率分布直方图的步骤是：

①__________；

②__________；

③__________；

④__________；

⑤__________．

(8) 在统计中，我们把__________叫做总体，组成总体的__________叫做个体．

(9) 从__________形成一个样本，样本中所包含的__________叫做样本容量．

(10) 随机抽样有三种方法，它们是__________，__________，__________．

(11) 在统计中，有两个特征数字可以对数据的情况作出简要的描述．均值可以__________；标准差可以__________．

(12) $\bar{x}=$__________；

$S=$__________．

(13) 在一元线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中，

$\hat{a}=$__________，$\hat{b}=$__________．

2. 重点与难点

本单元教材的教学重点是概率的概念、总体与样本的概念，用样本均值估计总体均值，用样本标准差估计总体标准差，及运用概率，统计初步知识

解决简单的实际问题．

本单元教材的教学难点是概率的概念、用样本估计总体，线性回归及运用统计知识解决简单的实际问题．

学习本单元内容需注意理解以下几方面的问题：

（1）**分类计数的加法原理**　做一件事，完成它可以有 n 类方式，在第 i 类方式中有 m_i 种不同的方法（$i=1, 2, \cdots, n$）．无论通过哪类方式的哪种方法，都可以独立完成这件事，那么完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法．

分步计数的乘法原理　做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第 i 步有 m_i 种不同的方法（$i=1, 2, \cdots, n$）．必须经过每一个步骤才能完成这件事，那么完成这件事共有

$$N = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$$

种不同的方法．

（2）事件 A 发生的次数与试验次数的比值 $\frac{m}{n}$ 叫做事件 A 发生的频率，记做 $W(A)=\frac{m}{n}$．随机事件的频率是每次随机试验的具体结果，随机试验次数不同，频率可能会不同．频率是一个与试验次数有关的相对数量；在大量重复试验时，事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 总是接近某个常数，并在其附近摆动．我们就称这个常数为事件 A 的概率，记做 $P(A)$．显然概率是频率在理论上的期望值，是一个与试验次数无关的绝对数量，是随机现象的本质属性．

（3）总体，个体，样本等概念，是从统计推断的角度和需要出发，对随机变量所做的一些描述．简单随机抽样，系统抽样，分层抽样是常用的从总体中抽取样本的方法，它们的共同特点是在抽样过程中，每一个个体被抽取的概率相等，体现了这三种抽样方法的客观性与公平性．

（4）总体的分布反映了总体在各个范围内取值的概率．由于总体分布通常不易知道，从而采用样本来估计总体的方法，这是研究统计问题的一个基本方法，即用样本估计总体．

均值可以显示数据的集中趋势；标准差可以显示数据的离散程度．在统计中，这两个特征数字可以对数据的情况作出简要的描述．

（5）线性相关是最简单的相关类型，教材中介绍的求线性回归方程的方法叫做最小二乘法．用最小二乘法求回归直线的方程可以直接由 x，y 的观测值（x_i，y_i）（$i=1, 2, \cdots, n$）求出 $\hat{a}$，$\hat{b}$ 的值．

例1 某射手射击一次，击中目标的概率是0.9.

(1) 他连射2次，恰有1次击中目标的概率是多少？

(2) 他连射3次，恰有1次击中目标的概率是多少？

解：(1) 设该射手“第1次击中目标”为事件 A_1，“第2次击中目标”为事件 A_2，则“第1次未击中目标”为事件 $\overline{A}_1$，“第2次未击中目标”为事件 $\overline{A}_2$，于是他“连射2次，恰有1次击中目标”为事件 $A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$.

$$
\begin{aligned}
\text{故 } P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2) &= P(A_1)(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2)\\
&=0.9\times(1-0.9)+(1-0.9)\times0.9\\
&=2\times0.9\times(1-0.9)\\
&=0.18.
\end{aligned}
$$

(2) 设该射手“第1次击中目标”为事件 A_1，“第2次击中目标”为事件 A_2，“第3次击中目标”为事件 A_3，则“第1次未击中目标”为事件 $\overline{A}_1$，“第2次未击中目标”为事件 $\overline{A}_2$，“第3次未击中目标”为事件 $\overline{A}_3$，于是他“连射3次，恰有1次击中目标”为事件 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

$$
\begin{aligned}
&\text{故 } P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\
&=0.9\times(1-0.9)\times(1-0.9)+(1-0.9)\times0.9\times(1-0.9)\\
&\quad+(1-0.9)\times(1-0.9)\times0.9\\
&=3\times0.9\times(1-0.9)^2\\
&=0.027.
\end{aligned}
$$

例2 从所有参加某学科考试的学生中抽取20名学生的成绩，分数如下：

80 60 90 85 75 65 70 80 90 95

85 95 75 70 85 80 85 65 90 85

试计算所有参加考试的学生的成绩的均值和标准差.（精确到0.01）

(1) 用计算器计算；

(2) 用 Excel 表计算.

解：(1) 将数据归类整理：

成绩	60	65	70	75	80	85	90	95
人数	1	2	2	2	3	5	3	2

开机后，按下列程序操作：

第一步：按 MODE 2 1；

第二步：输入 60 = 65 = 65 = 70 = 70 =…95 =；

第三步：按 AC 键；

按 SHIFT 1 5 2 =，即可求得均值为80.25；

按 SHIFT 1 5 4 =，即可求得标准差为10.19.

答：所有参加考试的学生成绩的均值为80.25分，标准差为10.19分.

（2）用 Excel 表计算．

第一步：将样本数据录入 Excel 表格 A1～A20 中．

第二步：计算均值．

用鼠标选中 A21，输入公式“＝AVERAGE（A1：A20）”得均值 80.25.

第三步：计算标准差．

用鼠标选中 A22，输入公式“＝STDEV（A1：A20）”得标准差 10.19.

综合练习 十

A 组

1. 从南面上山有 3 条路，从北面上山有 4 条路，此外无其他上山的路．
（1）如果从南面上山，北面下山，有多少种走法?
（2）如果从南面上山，南面下山，有多少种走法?
（3）某人任选一条路上山，原路返回，有多少种走法?
（4）某人任选一条路上山，不原路返回，有多少种走法?

2. 指出下列事件是必然事件，不可能事件，还是随机事件?
（1）如果 a 是实数，那么 $a^2=a$；
（2）从一副扑克牌中任取一张，恰好是大王；
（3）在标准大气压下，温度是 15°C 时，冰融化；
（4）在一批产品中有 4 件次品，任意抽取 5 件进行检验，其中的次品数不超过 4.

3. 某射手在同一条件下进行射击，结果如下：

射击次数 n	10	20	50	100	200	500
击中靶心次数 m	8	17	39	82	165	405
$W(A)=\frac{m}{n}$						

（1）计算表中各次击中靶心的频率；
（2）这个射手射击一次，击中靶心的概率是多少?

4. 已知某射手射击一次击中 6 环，7 环，8 环，9 环，10 环的概率分别是 0.19，0.18，0.17，0.16，0.15，求：
（1）该射手射击一次至少 8 环的概率；
（2）该射手射击一次至多 8 环的概率．

5. 甲，乙二人同时射击，甲击中目标的概率是 0.89，乙击中目标的概率是 0.92，至少有一人击中目标的概率是多少?

6. 一个容量为 50 的样本，数据的分组及各组的频数如下：

分组	10～15	15～20	20～25	25～30	30～35	35～40	40～45
频数	4	5	10	11	9	8	3

（1）列出样本的频率分布表；
（2）画出频率分布直方图．

7. 某地区抽查 12 户，调查双职工年收入如下（单位：元）：

59147　54926　58206　55215　54960　61408

62540　60739　68700　66076　67060　6900

求该地区双职工户平均收入和标准差．(结果保留到小数点后两位)

8. 某种商品的月需求量与该商品价格之间的一组调查数据为：

价格 x（元）	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16
需求量 y（千克）	15	20	25	30	35	45	60	80	80	110

求出 y 对 x 的回归直线方程．(结果保留到小数点后两位)

B　组

1. 将 a，b 两个球随机的放入编号为 1，2，3 的盒子中（每个盒子可以容纳 2 个球）．

(1) 写出所有的基本事件；

(2) 记 $A=$ “1 号盒子不空”，写出这个随机事件中的所有的基本事件．

2. 某城市人口统计表如下：

年　龄	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
活着的人数	100000	98081	90685	88027	72785	58742	38967	15032	1024	4

该城市人口中

(1) 30 岁的人活到 40 岁的频率约是多少？

(2) 50 岁的人不到 60 岁就死亡的概率约是多少？(结果保留到小数点后三位)

3. 一个工人负责看管 4 台机床，如果在一小时内这些机床不需要人去照顾的概率，第一台是 0.79，第二台是 0.79，第三台是 0.80，第四台是 0.81. 假设各台机床是否需要照顾相互之间没有影响，计算在一个小时内，这四台机床都不需要人去照顾的概率．(结果保留到小数点后两位)

4. 某地区小学五年级学生中随机抽取 100 名测得身高数据如下：

1.36	1.41	1.44	1.37	1.39	1.36	1.37	1.35	1.42	1.42
1.40	1.35	1.42	1.34	1.46	1.45	1.50	1.37	1.36	1.40
1.43	1.40	1.39	1.37	1.39	1.50	1.39	1.38	1.41	1.43
1.41	1.43	1.42	1.37	1.63	1.43	1.45	1.40	1.37	1.42
1.37	1.42	1.42	1.44	1.36	1.38	1.31	1.38	1.46	1.41
1.40	1.42	1.30	1.45	1.45	1.43	1.41	1.35	1.36	1.41
1.32	1.45	1.34	1.32	1.40	1.41	1.44	1.42	1.37	1.44
1.42	1.35	1.42	1.48	1.39	1.48	1.44	1.43	1.27	1.48
1.47	1.42	1.57	1.40	1.38	1.30	1.42	1.42	1.37	1.55

1.39　1.39　1.56　1.45　1.40　1.45　1.47　1.42　1.38　1.37

(1) 列出分组数据表；

(2) 画出频率分布直方图．

5. 甲，乙两种水稻在相同条件下，各种 100 亩，结果如下：

甲：

亩产	300	320	330	340
亩数	20	25	40	15

乙：

亩产	310	320	330	340
亩数	30	20	40	10

试判断哪种水稻质量较好？

6. 从一批机床零件毛坯中，抽取 20 个，称得重量如下（单位：千克）：

21.5　22.7　21.6　19.2　20.7　20.7　21.4　21.8　20.5　20.0

18.7　18.5　20.2　21.8　19.5　21.5　20.6　20.2　20.8　21.0

试计算这批毛坯重量的均值及标准差．（结果保留到小数点后两位）

7. 某厂连续 9 年中各年的工业总产值 x（万元）和工业净产值 y（万元）统计资料如下：

总产值 x	1156.1	1098.2	1187.8	1285.4	1411.5	1433.6	1561.9	1598.7	1685.8
净产值 y	476.3	462.3	485.9	497.6	519.4	537.3	535.8	540.4	546.2

求出 y 对 x 的回归直线方程．（结果保留到小数点后两位）

统计小史

在人类的发展史上，统计与概率的思想在很多方面对人们决策起到了重要的作用．比如，18世纪英国政府为了确定如何开展人寿保险业，对各个年龄段人的死亡情况进行了统计和分析，进而为后来人寿保险的发展提供了重要的科学依据．再如，生物学上孟德尔遗传学理论的建立就依赖于统计分析，在长期统计分析的基础上形成了科学的理论，为以后的数量遗传学提供了科学的思考方法．

目前，社会上的各行各业都离不开统计学：生物学上有生物统计学；经济学上有计量经济学；教育与心理方面有教育统计学、心理统计学；产品的生产过程中会用到质量控制的有关理论与方法，这也是统计学在起作用；律师为了提供有力的证据也离不开统计学；在医学上，为了评估有争议的医学报告，也需要利用统计学进行分析与论证；在天文学上，需要对大量的天文观测进行统计分析以获取可靠的结论．目前，一些新兴研究领域，如对策论、风险投资、随机模拟技术等也离不开统计与概率．

统计学在生活中的应用越来越广泛，对某个问题的调查最简单的方法就是普查，但这种调查方法的局限性很大，出于对费用和时间的考虑（如前面所说的，调查对象的量太大或是一些破坏性调查等），人们认识到需要在调查中进行抽查．但对抽查结果的可靠性一开始是有怀疑的．第二次世界大战期间，各交战国为适应急剧变化的战局，急需及时而有效地收集情报，除抽样调查外别无他法，这就促进了对抽样调查的理论和方法的研究．战后不久，出现了这方面的专著，F. 耶茨受联合国统计抽样专业委员会的委托，为协助1950年世界农业和世界人口调查而写的《人口调查与一般调查的抽样方法》就是其中之一．20世纪50年代后，世界各国已逐渐把抽样调查作为一种重要的调查方法．这是因为，普查的工作量太大，往往为人力、财力、时间所不允许，在实施过程中易出现人为的误差；经验表明，有时一个精心设计的抽样方案，其实施的效果甚至可以胜过普查．