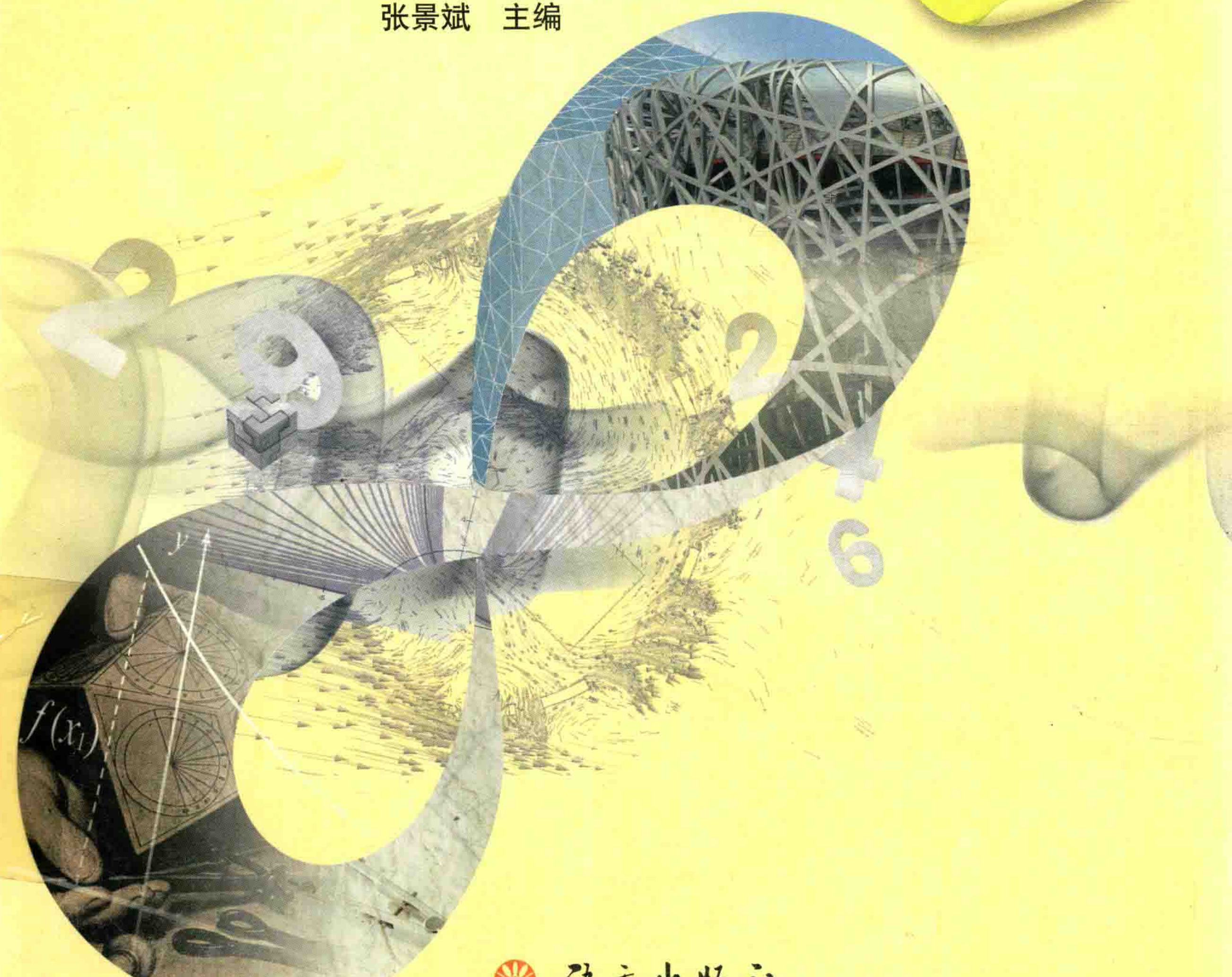
中等职业教育课程改革国家规划新教材
全国中等职业教育教材审定委员会审定

数学

SHUXUE

上册
基础模块

张景斌 主编



语文出版社

中等职业教育课程改革国家规划新教材

全国中等职业教育教材审定委员会审定

数学

SHUXUE

上册

基础模块

语文出版社

主　　编：张景斌
审　　定：李文林　高存明
主要编者：彭　林　李励信　张秋立　张　程
参加编写的人员：陈继泽　吴德仕　林韶春
宋　博　张桂芝　潘　涛
金朝晖　莫应念　钟畅武
周慧芳　李长娥

中等职业教育课程改革国家规划新教材
数　学
（基础模块）
上册
张景斌　主编
*
语文出版社出版
100010　北京朝阳门南小街51号
E-mail:ywp@ywcbs.com
新华书店经销　　河北新华印刷一厂印刷
*
787毫米×1092毫米　16开本　12.5印张
2009年6月第1版　　2009年7月第2次印刷
定价：18.00元
ISBN 978-7-80241-231-6

中等职业教育课程改革国家规划新教材
出 版 说 明

为贯彻《国务院关于大力发展职业教育的决定》（国发〔2005〕35 号）精神，落实《教育部关于进一步深化中等职业教育教学改革的若干意见》（教职成〔2008〕8 号）关于“加强中等职业教育教材建设，保证教学资源基本质量”的要求，确保新一轮中等职业教育教学改革顺利进行，全面提高教育教学质量，保证高质量教材进课堂，教育部对中等职业学校德育课、文化基础课等必修课程和部分大类专业基础课教材进行了统一规划并组织编写，从 2009 年秋季学期起，国家规划新教材将陆续提供给全国中等职业学校选用。

国家规划新教材是根据教育部最新发布的德育课程、文化基础课程和部分大类专业基础课程的教学大纲编写，并经全国中等职业教育教材审定委员会审定通过的。新教材紧紧围绕中等职业教育的培养目标，遵循职业教育教学规律，从满足经济社会发展对高素质劳动者和技能型人才的需要出发，在课程结构、教学内容、教学方法等方面进行了新的探索与改革创新，对于提高新时期中等职业学校学生的思想道德水平、科学文化素养和职业能力，促进中等职业教育深化教学改革，提高教育教学质量将起到积极的推动作用。

希望各地、各中等职业学校积极推广和选用国家规划新教材，并在使用过程中，注意总结经验，及时提出修改意见和建议，使之不断完善和提高。

教育部职业教育与成人教育司

2009 年 5 月

编写说明

中等职业教育课程改革国家规划新教材《数学》是根据教育部2009年颁布的《中等职业学校数学教学大纲》规定的课程教学目标和教学内容，紧密结合中等职业学校教学实际和学生实际而编写的。根据大纲规定的三个模块的教学内容和要求，本套教材分为《数学（基础模块）》（上、下册），《数学（职业模块）》（工科类分册、服务类分册）及《数学（拓展模块）》，共五册教材。

本教材为《数学（基础模块）》，计划学时数为128学时，其中上册60学时，下册68学时。基础模块是教学大纲中规定的各专业学生必修的基础性内容和应达到的基本要求，基于基础模块的教学内容要求及中职数学教学实际，本教材的编写特色体现在以下几个方面：

1. 从中职数学教学的特点出发，加强教材的基础性、实用性和灵活性。

新教材适用于不同地区、不同类型的职业学校，为不同专业，不同水平，不同发展需求的学生提供适宜的学习平台。根据新大纲的教学要求，教材的编写更加突出知识的基础性、应用性以及学生获取知识手段的多样性，其表现为知识低难度，教材叙述、例题的选择尽量贴近职校生的学习与生活实际，体现了时代的特色，体现了“实用为主、够用为度”的编写理念。

2. 着眼于中职数学教学的实际，通过“低起点、巧衔接”的编写手法，力求实现学生乐于学，教师便于教的目标。

教材编写遵循学生认知发展的规律，降低知识的起点，由已知到未知，由浅入深，由具体到抽象。教材编写既关注与初中数学知识的衔接，又兼顾与专业课程内容的衔接。例如，教材在每一章起始安排了“回顾与思考”和相应的问题情境，使学生在已有经验的回顾或问题情境中，自然进入新知识的学习、探索。又如，“工具箱”栏目帮助学生适时回忆已有知识，为有效运用知识经验提供了帮助，同时教师也可以通过此栏目帮助有困难的学生复习旧知识，体现了教材的弹性；例题的讲解深入浅出、并尽量将“步子”迈得小一些，使学生接受起来容易一些，教师教学方便一些；每章的“归纳与

总结”，适当设计了条件填充或结论填充，为学生提供了数学学习方法的指导。

3. 注重学生的参与，活跃学生的思维，为学生终身发展打基础。

通过多年的教材编写及教学实践反馈，我们感受到数学教师在教学设计的过程中均力争将课堂变成师生共同活动的场所，越发强调学生的参与。因此教材在知识形成过程中设计了“试一试”“想一想”“议一议”“练一练”等环节，通过师生动手实验、合作交流，让学生的思维活跃起来，积极参与到教学过程中来。这样，既希望实现学生学会，又希望通过学习过程实现学生会学，为学生的终身发展奠定基础。

4. 注重教材的可读性，培养学生的学习兴趣、价值观和人文精神。

在保证科学性的基础上，教材写作尽量运用贴近学生的语言，增加趣味性。教材中的“学习小贴示”（小常识、名词解释）“阅读空间”（数学名人轶事、数学发展简介、数学与其他学科的联系、趣味性较强的数学应用题等），既通俗易懂又生动有趣，意在开阔学生的眼界、提高学生数学学习兴趣、培养学生价值观和人文精神。

5. 突出数学与现代信息技术的结合，体现教材的现代性。

随着现代信息技术不断更新发展，数学教学手段、方法也在不断的更新、并且更加便捷，学生解决数学问题的方法也更加多样。本教材的编写强调与信息技术的结合，如“数学实验”等内容的设置便是强调计算器、计算机软件等信息技术的使用，意在培养学生的计算能力和数据处理能力，同时为教师教学提供更为直观、高效的教学手段。

6. “三合一”功能的教参，导学性强大的学生学习指导用书。

教参的编写将教材分析与教学建议、教学资源开发与利用、教学研究拓展三者合为一体，为帮助教师理解教材，实现数学课堂教学的优化设计与有效实施，提供了丰富的指导性意见及参考资料。同时各册教参均配有教学指导光盘，以提高教师备课效率。学生学习指导用书除了具备作业册的功能外，还具备复习、总结的功能，提高了学生的学习效率和能力。

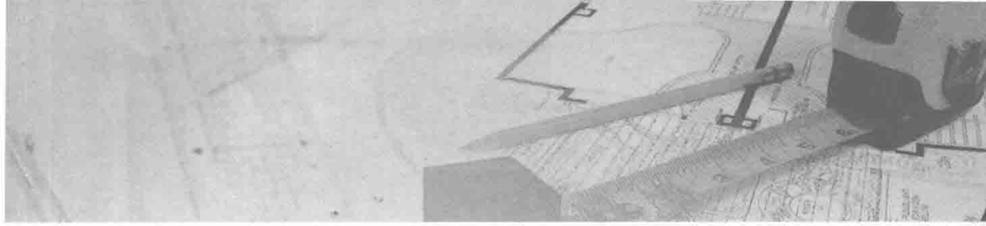
为了编写出高质量、高水平的中等职业教育课程改革国家规划新教材，我社成立了中等职业教育课程改革国家规划新教材编写委员会，编委会主任：王旭明、王晓庆；编委会委员（以姓氏笔划为序）：王立善、王社光、

方鸣、尹江峰、邓弘、石林百、向伟、李秋芳、张建虹、张景斌、张程、金朝晖、赵大鹏、赵贝、赵曾、柯敬贵、龚双江、彭世东、董强、惠和兴、戴宗显。

衷心希望广大中等职业学校的老师、同学在使用这套教材的过程中有什么意见与建议及时跟我们反馈，我们愿意和您们一道，为提高中等职业教育数学教学水平而努力。

语文出版社

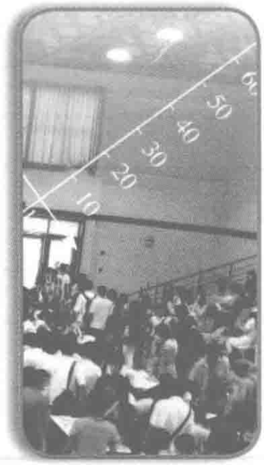
2009年6月



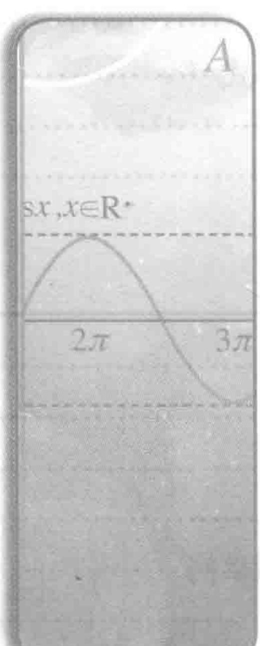
目录

目录

第四单元 指数函数与对数函数 88



第五单元 三角函数 130



第一单元　集　合

回顾与思考

在初中，我们已经接触过“集合”一词.比如，在学习数的分类时，就用到过“正数的集合”“负数的集合”；在学习解一元一次不等式时，一个不等式的解也构成了集合，如所有大于2的实数组成的集合是不等式$2x-1>3$的解集；在初中几何学习圆的概念时，我们说圆是平面内到定点的距离等于定长的点的集合，出现了平面内点的集合的概念.

其实，我们在日常生活中，也会经常会用到集合概念.诸如，某中等职业学校高一的全体同学；某超市粮油货架上所有食用油等.集合语言是现代数学的基本语言，它不仅有助于简洁、准确地表达数学内容，而且可以用来刻画和解决一些生活中的问题.学习集合，还可以发展同学们用数学语言进行交流的能力.

1.1 集　合

引例

2008 年，北京举办了第二十九届奥运会，为了组织、安排好各项赛事，奥运会组委会要统计每个项目各国运动员的人数和名单．比如，中国乒乓球男子团体项目是由王皓，王励勤，马琳，陈玘组成代表队．这时，我们就可以说王皓，王励勤，马琳，陈玘组成了乒乓球男子团体项目的中国代表队这个集合，可以把王皓，王励勤，马琳，陈玘这四名运动员看做这个集合中的元素．

通常将某些指定的对象集中在一起就成为一个**集合**，集合中的每个对象叫做这个集合的一个**元素**.

我们再来看几个集合的例子：

(1) 把某职业中学高一年级的所有学生看成一个整体，那么这个年级全体学生就形成一个集合，其中每个学生都是这个集合的元素；

(2) 把方程 $x^2=1$ 的解看成一个整体，那么这个方程的解就形成一个集合，其中方程的两个根 1 和 -1 都是这个集合的元素；

(3) 把中国的直辖市看成一个整体，那么中国的直辖市就形成一个集合，北京、上海、天津、重庆都是这个集合的元素．

给定的集合，它的元素必须是**确定的**．也就是说，给定一个集合，那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了．例如，“中国的直辖市”构成一个集合，北京、上海、天津、重庆就在这个集合中，杭州、南京、广州……不在这个集合中．

一个给定集合中的元素是**互不相同的**．也就是说，集合中的元素是**不重复出现的**.

例1 判断下面各题所指的对象是否能组成集合，并说明理由：

（1）小于 5 的正整数；

（2）好看的电影；

（3）新华中学 2009 年 9 月入学的所有高一学生；

（4）参加 2008 年北京奥林匹克运动会的中国体育代表团团员；

（5）我国的小河流．

解：（1），（3），（4）都能组成集合，因为每一个元素都是确定的．（2），（5）不能组成集合．因为没有确切的标准用来判断一部电影“好看”与否，也没有确切的标准用来判断一条河流“大小”与否．

议一议

（1）你所在班级中，高个子同学能否构成集合？

（2）你能否确定，你所在班级中，最高的 3 位同学构成的集合？

我们通常用大写拉丁字母 A，B，C，…表示集合，用小写拉丁字母 a，b，c，…表示集合中的元素．

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记做 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 中的元素，就说 a 不属于集合 A，记做 $a\notin A$.

集合可以根据它含有的元素的个数分为两类：

含有有限个元素的集合叫做**有限集**，含有无限个元素的集合叫做**无限集**.

不含任何元素的集合叫做**空集**，记做$\varnothing$.

数的集合简称数集．下面是一些常用的数集及其记法：

全体非负整数的集合，通常简称**非负整数集（或自然数集）**，记做 $\mathbf{N}$，非负整数集内排除 0 的集合，也称**正整数集**，记做 $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$；

全体整数的集合，简称**整数集**，用 $\mathbf{Z}$ 表示；

全体有理数的集合，简称**有理数集**，用 $\mathbf{Q}$ 表示；

全体实数的集合，简称**实数集**，用 $\mathbf{R}$ 表示．

为了方便，还用 $\mathbf{Q}_+$ 表示正有理数

工具箱

对于我们在初中学过的数，它们的关系可以归纳如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{正整数}\\\text{零}\end{array}\right\}\text{自然数}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

集，$\mathbf{Q}_-$表示负有理数集；$\mathbf{R}_+$表示正实数集，$\mathbf{R}_-$表示负实数集.

例2 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空：

(1) 0 ________ $\mathbf{N}$；　(2) 0 ________ $\mathbf{N}_+$；　(3) 0 ________ $\mathbf{Z}$；

(4) $\sqrt{2}$ ________ $\mathbf{Z}$；　(5) 5 ________ $\mathbf{R}$；　(6) $\frac{1}{3}$ ________ $\mathbf{Q}$；

(7) $\sqrt{3}$ ________ $\mathbf{Q}$；　(8) $-\frac{1}{2}$ ________ $\mathbf{Q}_-$.

解：(1) $\in$；(2) $\notin$；(3) $\in$；(4) $\notin$；(5) $\in$；(6) $\in$；(7) $\notin$；(8) $\in$.

练习

1. 判断下列各题中所指的对象是否能组成集合，并说明理由：

(1) 著名的运动健儿；　(2) 英文的 26 个字母；

(3) 本校篮球队的全体队员；　(4) 乐于奉献的人；

(5) 非常接近 1 的数；　(6) 大于 10 的全体自然数.

2. 下面给出的对象能否构成集合？如能请写出其中的所有元素.

(1) 大于 3 小于 11 的偶数；　(2) 平方等于 1 的数.

3. 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空：

(1) -1 ________ $\mathbf{N}$；　(2) 3.14 ________ $\mathbf{Q}$；　(3) $\frac{1}{3}$ ________ $\mathbf{Z}$；

(4) $\sqrt{3}$ ________ $\mathbf{R}$；　(5) $-\frac{1}{2}$ ________ $\mathbf{R}$；　(6) 0 ________ $\mathbf{Q}$.

习题一

1. 判断下列各题中所指的对象是否能组成集合，并说明理由：

(1) 大于 5 小于 20 的偶数；

(2) 非常大的数.

2. 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空：

(1) 0 ________ $\mathbf{N}$；　(2) 1.2 ________ $\mathbf{Z}$；　(3) $\sqrt{5}$ ________ $\mathbf{Q}$；

(4) $-\frac{1}{2}$ ________ $\mathbf{Q}$；　(5) 0 ________ $\mathbf{N}_+$；　(6) π ________ $\mathbf{R}$.

3. 判断下列各题所表示的关系是否正确：

(1) $1 \in \mathbf{Z}_+$；　(2) $-\frac{3}{2} \in \mathbf{Q}$；　(3) $\pi \in \mathbf{Q}$；

(4) $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$；　(5) $-3 \in \mathbf{Z}$；　(6) $0 \in \mathbf{R}_+$.

1.2 集合的表示法

想一想 如何表示一个集合呢？

1. 列举法

我们可以把“地球上的四大洋”组成的集合表示为 {太平洋，大西洋，印度洋，北冰洋}，把“方程 $(x-1)(x+2)=0$ 的所有实数根”组成的集合表示为 $\{1, -2\}$.

像这样把集合的元素一一列举出来，并用大括号括起来表示集合的方法叫做**列举法**.

例1 某大型超市进了两批货物，第一批包括食用油、盐、醋、酱油．第二批包括牙膏、洗衣粉、消毒液、洗衣皂．请用列举法表示这两个集合．

分析：因为超市两次的进货品种是有限的，所以可以一一列举出来．

解：设 A 表示超市第一批进货品种的集合，B 表示超市第二批进货品种的集合，则

$A=${食用油，盐，醋，酱油}；

$B=${牙膏，洗衣粉，消毒液，洗衣皂}.

例2 用列举法表示下列集合：

(1) 小于 10 的所有自然数组成的集合；

(2) 由 1 ~ 20 以内的所有质数组成的集合.

解：(1) 设小于 10 的所有自然数组成的集合为 A，那么

$$A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

说明：集合中的元素与列举的顺序无关，因此集合 A 可以有不同的列举方法. 例如

$$A=\{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}.$$

(2) 设由 1 ~ 20 以内的所有质数组成的集合为 B，那么

$$B=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}.$$

工具箱

如果一个大于 1 的正整数，只能被 1 和它本身整除，不能被其他正整数整除，那么这样的正整数叫做质数.

由于无限个元素不可能一一写出，对于元素呈一定规律排列的无限集可以写出其中有限几个元素后再加上三点“…”来表示. 例如，由所有2的正整数倍所组成的集合，可以表示为

$\{2, 4, 6, 8, \cdots, 2n, \cdots\}$，其中 n 表示正整数.

一个集合可能只有一个元素. 例如，既不是正数又不是负数的实数集合中就只有一个元素0. 用列举法可以把这个集合表示为 $\{0\}$. 要注意 $\{0\}$ 与0有着本质的区别：$\{0\}$ 表示只有一个元素0的集合，0表示这个集合中的一个元素. 又如，由地球的卫星（非人造卫星）构成的集合，也只有一个元素，它可以表示成 {月亮}.

2. 描述法

想一想

不等式 $x-1.5<0$ 的解集怎样表示？用列举法行吗？如果不行，怎么办？

不等式 $x-1.5<0$ 的解集有无穷多个元素，而且无法一一列举出来，因此不能用列举法表示这个集合. 克服困难的办法是，抓住这个集合的元素具有的特征：它们是实数，并且小于1.5. 于是我们可以把这个集合表示成

$\{x \in \mathbf{R} \mid x<1.5\}$.

其中大括号内竖线左边的 x 代表这个集合的元素，竖线右边写的是这个集合的元素的所具有的特征性质，这种表示集合的方法称为**描述法**.

我们约定，如果从上下文看，$x \in \mathbf{R}$ 是明确的，那么可以省略 $x \in \mathbf{R}$，上述集合可以写成

$\{x \mid x<1.5\}$.

有些集合用描述法表示时，可以省去竖线和它的左边部分. 例如，由所有锐角三角形所组成的集合，可以表示为

{锐角三角形}.

例3 试分别用列举法和描述法表示下列集合：

（1）方程 $x^2-2=0$ 的所有实数根组成的集合；

（2）由大于10小于20的所有整数组成的集合.

解：（1）设方程 $x^2-2=0$ 的实数根为 x，并且满足条件 $x^2-2=0$，因此，用描述法表示为

$$A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-2=0\}.$$

方程 $x^2-2=0$ 有两个实数根$\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$，因此，用列举法表示为

$$A=\{\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\}.$$

（2）设大于 10 小于 20 的整数为 x，它满足条件 $x\in\mathbf{Z}$，且 $10<x<20$，因此，用描述法表示为

$$B=\{x\in\mathbf{Z}\mid 10<x<20\}.$$

大于 10 小于 20 的整数有 11，12，13，14，15，16，17，18，19，因此，用列举法表示为

$$B=\{11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19\}.$$

练习

1. 用列举法表示下列集合：

（1）{小于 2 的自然数}；　　（2）{大于 3 小于 10 的偶数}；

（3）{绝对值等于 1 的数}.

2. 在实数范围内，用列举法表示下列方程的解集：

（1）$2x-1=0$；　（2）$4(x+1)-3(x-1)=2$；　（3）$x^2-5x+4=0$.

3. 用描述法表示下列集合：

（1）大于 3 的全体实数；　　（2）大于 5 且小于 15 的全体偶数.

习题　二

1. 用适当的方法表示下列集合：

（1）方程 $x^2-1=0$ 的解集；　　（2）不等式 $3x+1>2$ 的解集；

（3）比 2 小的数；　　（4）方程 $x^2+2=0$ 的实数解集；

（5）大于 2 且小于 19 的 3 的倍数的集合；（6）所有正偶数组成的集合.

2. 把下列集合用另一种表示法表示出来：

（1）$\{x\in\mathbf{Z}\mid -5<x<3\}$；　　（2）$\{x\mid x^2=x\}$；

（3）$\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots\}$；　　（4）$\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots\}$；

（5）{中国古代四大发明}.

3. 下列四个集合中，空集是（　　）.

A. $\{0\}$　B. $\{x\mid x>8$ 且 $x<5\}$　C. $\{x\in\mathbf{N}\mid x^2-1=0\}$　D. $\{x\mid x>4\}$

1.3 集合之间的关系

想一想

实数有相等关系、不等关系，如 $6=6$，$6<8$，$6>2$，等等. 类比实数之间的关系，观察下面几个例子，你能发现两个集合间的关系吗？

(1) $A=\{$本校高中一年级一班全体同学$\}$，
$B=\{$本校高中一年级全体同学$\}$；

(2) $C=\{1, 3, 5\}$，
$D=\{1, 2, 3, 4, 5\}$；

(3) $E=\{x \mid (x+1)(x+2)=0\}$，
$F=\{-1, -2\}$.

可以发现，在(1)中，集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素. 这时我们说集合 A 与集合 B 有包含关系. (2)中的集合 C 与集合 D 也有这种关系.

一般地，对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，那么，集合 A 叫做集合 B 的**子集**，记做

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A,$$

读做**"A 包含于 B"**或**"B 包含 A"**.

在数学中，我们经常用平面上封闭曲线的内部代表集合，这种图称为 **Venn 图**. 这样，上述集合 A 和集合 B 的包含关系，可以用图 1－1 表示.

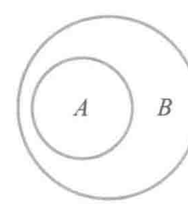


图 1－1

在(3)中，由于方程 $(x+1)(x+2)=0$ 的解是 $x_1=-1$，$x_2=-2$，因此，集合 E，F 的元素完全相同.

如果两个集合的元素完全相同，那么我们就说这两个集合相等.

我们可以用子集概念对两个集合的相等作进一步的数学描述.

如果集合 A 是集合 B 的子集（$A \subseteq B$），且集合 B 是集合 A 的子集（$B \subseteq A$），显然它们的元素完全相同，所以集合 A 与集合 B **相等**，记做

$$A=B$$

如果集合 $A \subseteq B$，但存在元素 $x \in B$ 且 $x \notin A$，我

学习小贴示

Venn 图，也叫文氏图，是由英国数学家维恩（Venn, John, 1834. 8. 4—1923. 4. 4）首先采用的，他用固定位置的交叉环加阴影的形式表示逻辑问题.

们称集合 A 是集合 B 的**真子集**，记做

$A \subsetneqq B$（或 $B \supsetneqq A$）.

例如，在(2)中，$C \subseteq D$，但 $2 \in D$ 且 $2 \notin C$，所以集合 C 是集合 D 的真子集.

当集合 A 不包含集合 B，或集合 B 不包含集合 A 时，则记做

$A \nsubseteq B$（或 $B \nsupseteq A$）.

例如，给定两个集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$. 由于集合 B 中有元素 3，不属于集合 A，所以 B 不是 A 的子集，记做 $B \nsubseteq A$；又由于集合 A 中有元素 0，不属于集合 B，所以 A 不是 B 的子集，记做 $A \nsubseteq B$.

工具箱

两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形.

有一个角是直角的平行四边形叫做矩形.

有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形.

有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.

例1 指出下面各集合之间的关系，并用 Venn 图表示.

$A=\{$平行四边形$\}$，$B=\{$菱形$\}$，$C=\{$矩形$\}$，$D=\{$正方形$\}$.

解： $D \subsetneqq B \subsetneqq A$；$D \subsetneqq C \subsetneqq A$，如图 1－2 所示.

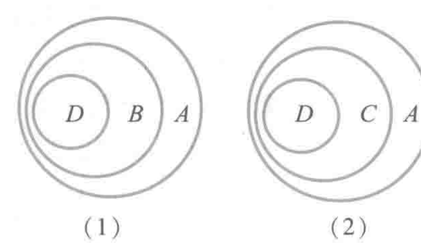


图 1－2

例2 指出下列两个集合之间的关系：

(1) $A=\{2,4,5,7\}$，$B=\{2,5\}$；

(2) $P=\{x \mid x^2=1\}$，$Q=\{-1,1\}$；

(3) $C=\{$奇数$\}$，$D=\{$整数$\}$.

解： (1) $B \subsetneqq A$；(2) $P=Q$；(3) $C \subsetneqq D$.

想一想 包含关系 $\{a\} \subseteq A$ 与属于关系 $a \in A$ 有什么区别？

由上述集合之间的基本关系，可以得到下列结论：

(1) 任何一个集合是它本身的子集，即 $A \subseteq A$；

(2) 对于集合 A，B，C，如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$，那么 $A \subseteq C$；

(3) 对于集合 A，B，C，如果 $A \subsetneqq B$，$B \subsetneqq C$，那么 $A \subsetneqq C$.

我们规定：**空集是任何集合的子集**. 也就是说，对于任何集合 A，

都有

$$\varnothing \subseteq A.$$

显然，**空集是任何非空集合的真子集**. 也就是说，对于任何非空集合 A，总有

$$\varnothing \subsetneqq A.$$

例3 写出集合 $A=\{-1, 0, 1\}$ 的所有子集和真子集.

分析：集合 A 中的任意 1 个，2 个，3 个元素组成的集合及空集，都是集合 A 的子集.

解：集合 A 的所有子集是$\varnothing$，$\{-1\}$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{-1, 0\}$，$\{-1, 1\}$，$\{0, 1\}$，$\{-1, 0, 1\}$.

在上述子集中，除去集合 A 本身，即 $\{-1, 0, 1\}$，剩下的都是 A 的真子集.

练 习

1. 判断下列四个集合之间的关系，并用 Venn 图表示：
   A = {四边形}，　B = {平行四边形}，　C = {矩形}，　D = {正方形}.
2. 判断下列两个集合之间的关系：
   (1) $A=\{1, 2, 4\}$，$B=\{24 \text{ 的约数}\}$；
   (2) $A=\{x \mid x=2n, n\in \mathbf{N}_+\}$，$B=\{x \mid x=4n, n\in \mathbf{N}_+\}$；
   (3) $A=\{2, 4, 6\}$，$B=\{8 \text{ 与 } 12 \text{ 的最大公约数}\}$.
3. 用适当的符号（$\in$，$\notin$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$，$=$）填空：
   (1) $\{0\}$________ $\varnothing$；　(2) d ________ $\{a, b, c\}$；
   (3) $\{0\}$________ $\{x \mid x=0\}$；　(4) 3 ________ $\{x \mid x^2-9=0\}$；
   (5) $\{1, 2, 3, 4\}$________ $\{4, 1, 3, 2\}$；
   (6) $\{a\}$________ $\{a, b\}$；　(7) $(1, 0)$________ $\{(1, 0)\}$.
4. 写出集合 $A=\{s, t\}$ 的所有子集和真子集.

习题 三

1. 指出下列集合之间的关系，并用 Venn 图表示：

A = {三角形}；B = {等腰三角形}；

C = {等边三角形}；D = {等腰直角三角形}.

2. 指出下列集合之间的关系：

(1) $A=\{x \mid x^2-9=0\}$，$B=\{-3, 3\}$；

(2) $A=\{x \mid |x|=1\}$，$B=\{-1, 1\}$.

3. 在下列各题中，关系式“$A\subseteq B$”“$B\subseteq A$”“$A\subsetneqq B$”“$B\subsetneqq A$”“$A=B$”哪些可以成立？

(1) $A=\{5, 10, 15\}$，$B=\{5, 10\}$；

(2) $A=\{1, 2, 3, 6\}$，$B=\{x \mid x$ 是 6 的正因数$\}$；

(3) $A=\{2, 3, 5, 7\}$，$B=\{1, 3, 5\}$.

4. 已知 $A=\{0, 1, 2\}$，$B=\{1, 2\}$，下列各种写法哪个正确，哪个不正确？

(1) $1\in A$；　(2) $0\notin A$；　(3) $\{1\}\in A$；

(4) $1\subsetneqq A$；　(5) $\{0\}\subsetneqq B$；　(6) $\{1\}\subsetneqq A$；

(7) $\varnothing\subsetneqq A$；　(8) $A\subseteq B$；　(9) $B\subsetneqq A$.

5. 把下列各题中的集合或元素用符号“$\in$”或“$\subsetneqq$”“$\supsetneqq$”连接起来：

(1) 0 ______ $\{-1, 0\}$；　(2) $\{0\}$ ______ $\{-1, 0\}$；

(3) 0 ______ $\{0\}$；　(4) $\varnothing$ ______ $\{0\}$；

(5) $\{x \mid x\geqslant 5\}$ ______ $\{x \mid 5<x<7\}$.

6. 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集和真子集.

1.4 集合的运算

1. 并集

引例

某职校为了选拔参加全省中职生职业技能大赛的参赛选手，先在校内组织了两项技能比赛. 该校职高二年级（1）班的 35 名同学中有 14 人参加了英语口语演讲比赛，有 10 人参加计算机程序设计比赛，有 5 人两项比赛都参加了，若设

集合 $A=\{$参加英语口语演讲比赛的同学$\}$,

集合 $B=\{$参加计算机程序设计比赛的同学$\}$,

那么该班参加校内职业技能比赛的同学的集合就是

集合 $C=\{$参加校职业技能比赛的同学$\}$.

显然，集合 C 是由属于集合 A 和集合 B 的所有元素组成的集合.

试一试　你能算出该班多少学生参加了技能比赛?

一般地，对于两个集合 A 与 B，由属于集合 A 和属于集合 B 的所有元素组成的集合，叫做 A 与 B 的**并集**，记做 $A\cup B$，读做“A 并 B”，或 A 与 B 的并集，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

例如，集合 $A=\{1, 2, 3, 6\}$，集合 $B=\{1, 2, 4\}$，那么集合 A 与集合 B 的并集 $C=A\cup B=\{1, 2, 3, 6\}\cup\{1, 2, 4\}=\{1, 2, 3, 4, 6\}$.

集合 A 与 B 的并集 $A\cup B$，可以用图 1－3 中的阴影表示．

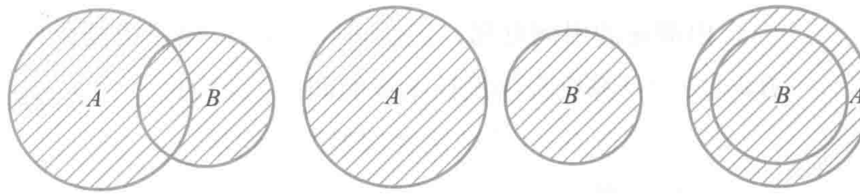


图 1－3

例1 设 $A=\{4, 5, 6, 8\}$，$B=\{3, 5, 7, 8\}$，求 $A\cup B$.

解：$A\cup B=\{4, 5, 6, 8\}\cup\{3, 5, 7, 8\}=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$．

说明：在求每个集合的并集时，它们的公共元素在并集中只能出现一次，如元素5，8.

例2 设集合 $A=\{x\mid -1<x<2\}$，集合 $B=\{x\mid 1<x<3\}$，求$A\cup B$.

解：$A\cup B=\{x\mid -1<x<2\}\cup\{x\mid 1<x<3\}=\{x\mid -1<x<3\}$．

我们还可以在数轴上表示例 2 中的并集 $A\cup B$，如图 1－4 所示阴影部分．

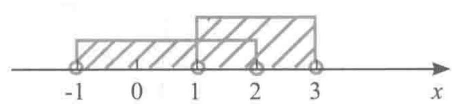


图 1－4

议一议

下列关系式成立吗？

$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$.

练习

1. 在空格上填写适当的集合：

（1）集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{2, 4, 6\}$，$A\cup B=$________；

（2）$\{x\mid x+2\leqslant 0\}\cup\{x\mid x-3>0\}=$________.

2. 设集合 $A=\{x\mid x>0\}$，$B=\{x\mid x<3\}$，求 $A\cup B$.

3. 设集合 $A=\{x\mid x>1\}$，$B=\{x\mid x\leqslant -1\}$，求 $A\cup B$.

4. 设集合 $A=\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid x<1\}$，求 $A\cup B$.

2. 交集

由前面的引例可知，集合 $A=\{$参加英语口语演讲比赛的同学$\}$，集合 $B=\{$参加计算机程序设计比赛的同学$\}$，可设

集合 $D=\{$两项比赛都参加的同学$\}$.

显然，集合 D 是由既参加英语口语演讲比赛又参加计算机程序设计比赛的同学组成的集合.

一般地，对于两个集合 A 与 B，由它们的所有公共元素组成的集合，叫做 A 与 B 的**交集**，记做 $A\cap B$，读做"A 交 B"，或 A 与 B 的交集.

所谓公共元素，就是既属于集合 A 又属于集合 B 的元素，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

例如，集合 $A=\{1, 2, 3, 6\}$，集合 $B=\{1, 2, 4\}$，那么集合 A 与集合 B 的交集 $C=A\cap B=\{1, 2, 3, 6\}\cap\{1, 2, 4\}=\{1, 2\}$.

集合 A 与 B 的交集 $A\cap B$，可以用图 1－5 中的阴影部分表示.

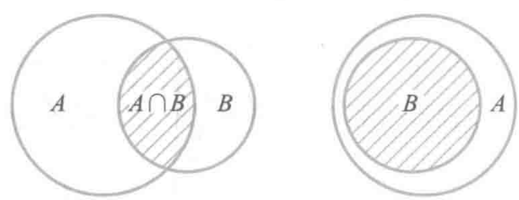


图 1－5

想一想

图 1－6 中没有阴影，那么 $A\cap B$ 是什么？

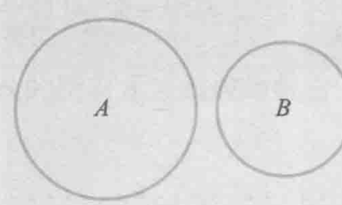


图 1－6

例3 新华中学开运动会，设

$A=\{x\mid x$ 是新华中学高一年级参加百米赛跑的同学$\}$，

$B=\{x\mid x$ 是新华中学高一年级参加跳高比赛的同学$\}$，

求 $A\cap B$.

解：$A\cap B$ 就是新华中学高一年级中那些既参加百米赛跑又参加跳高比赛的同学组成的集合. 所以，$A\cap B=\{x\mid x$ 是新华中学高一年级既参加百米赛跑又参加跳高比赛的同学$\}$.

例4 设 $A=\{x \mid x\geqslant 0\}$，$B=\{x \mid x<3\}$，求 $A\cap B$.

解：$A\cap B=\{x \mid x\geqslant 0\}\cap\{x \mid x<3\}=\{x \mid 0\leqslant x<3\}$.

我们也可以在数轴上表示 $A\cap B$，如图 1－7 所示阴影部分.

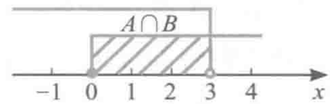


图 1－7

例5 设 $A=\{x \mid x^2-9=0\}$，$B=\{x \mid x(x-3)=0\}$，求 $A\cap B$.

解：因为 $A=\{x \mid x^2-9=0\}=\{-3,\ 3\}$，$B=\{x \mid x(x-3)=0\}=\{0,\ 3\}$，所以 $A\cap B=\{-3,\ 3\}\cap\{0,\ 3\}=\{3\}$.

议一议

下列关系式成立吗？

$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$.

练习

1. 在空格上填写适当的集合：

   (1) $\{1,\ 3,\ 5\}\cap\{1,\ 2,\ 3\}=$________；

   (2) $\{b,\ c,\ e\}\cap\{a,\ b,\ f\}=$________；

   (3) $\mathbf{Z}\cap\mathbf{Q}=$________；

   (4) $\{x \mid x^2-x=0\}\cap\{0\}=$________.

2. 已知集合 A，B，求 $A\cap B$.

   (1) $A=\{x \mid x\geqslant -2\}$，$B=\{x \mid x<4\}$；

   (2) $A=\{x \mid x\geqslant -1\}$，$B=\{x \mid x>1\}$.

3. 全集与补集

由前面的引例，若设集合 S 是全班同学的集合，集合 C 是班上所有参加全校技能比赛的同学的集合，而集合 E 是班上所有没有参加全校技能比赛的同学的集合，那么这三个集合有什么关系呢？容易看出，集合 E 就是集合 S 中所有不属于集合 C 的元素所组成的集合 .

试一试 你能算出有多少人没有参加任何比赛吗？

一般地，如果在讨论的问题中，每一个集合都是某一个集合 S 的子集，那么就称 S 为**全集**. 例如，在讨论有关实数的问题时，通常把 $\mathbf{R}=\{$实数$\}$ 作为全集.

设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集（即 $A\subseteq S$），由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在 S 中的**补集**，记做 $\complement_S A$，读做“A 补”，即

$$\complement_S A=\{x \mid x\in S \text{ 且 } x\notin A\}.$$

集合 A 在 S 中的补集 $\complement_S A$，可用图 1－8 中的阴影部分来表示. 图中的矩形内部表示全集 S，圆内部分表示集合 A.

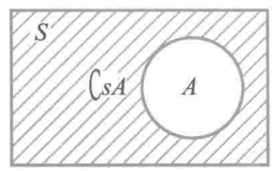


图 1－8

例6 设全集 $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$A=\{1, 5\}$，求 $\complement_S A$ 及 $\complement_S(\complement_S A)$.

解：$\complement_S A=\{2, 3, 4\}$，$\complement_S(\complement_S A)=A=\{1, 5\}$.

例7 已知全集 $S=\{$三角形$\}$，$A=\{$直角三角形$\}$，求 $\complement_S A$.

分析：三角形按角分类可以分为锐角三角形、钝角三角形、直角三角形. 其中前面两种又统称为斜三角形.

解：$\complement_S A=\{$非直角三角形$\}=\{$斜三角形$\}$.

议一议

下列关系式成立吗？

$A\cap\complement_S A=\varnothing$，$A\cup\complement_S A=S$，$\complement_S(\complement_S A)=A$.

练习

1. 在空格上填写适当的集合：

（1）设 $A=\{3, 5, 6\}$，$\complement_S A=\{1, 2\}$，则全集 $S=$________；

（2）设全集 $S=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，$A=\{1, 2, 4\}$，$B=\{1, 3\}$，则 $\complement_S A=$________；$A\cup\complement_S B=$________；$\complement_S A\cup B=$________；$\complement_S A\cap\complement_S B=$________.

2. 设全集 $S=\mathbf{R}$，求 $\complement_S A$，并在数轴上表示：

（1）$A=\{x \mid x\leqslant 0\}$；（2）$A=\{x \mid x>1\}$.

3. 已知集合 A 与 B 有相同的全集 S，且 $A=\{2, 5, 6\}$，$\complement_S A=\{1, 3, 4\}$，$B=\{1, 6\}$，求 $\complement_S B$.

习题 四

1. 填空题：

(1) $\{a, b, \_\_\_\_\_\_\} \cap \{c, d, \_\_\_\_\_\_\} = \{b, c\}$；

(2) $\{a, b, \_\_\_\_\_\_\} \cup \{b, d, e\} = \{a, b, c, d, \_\_\_\_\_\_\}$；

(3) $\{a, t, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_\} \cap \{d, c, e, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_\} = \{a, b, e\}$.

2. 用适当的集合填空：

$\cap$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$			
A			
B		$B\cap A$	

$\cup$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$			
A	A		
B			

3. 已知集合 A，B，求 $A\cap B$，$A\cup B$，并在数轴上用对应的点集表示出来.

(1) $A=\{x \mid -2<x<2\}$，　$B=\{x \mid -1<x\leqslant 4\}$；

(2) $A=\{x \mid x\leqslant 2\}$，　$B=\{x \mid x\leqslant 4\}$.

4. (1) 已知 $\{1, 2, 3, 4, 5\}=\{1, 2, 3, 4, a\}$，求 a；

(2) 已知 $\{1, 2, 3, 4, 5\}=\{1, 2, 3, a, b\}$，求 a，b；

(3) 已知 $\{1, 2, 3, 4, 5\}=\{1, 2, 2a-1, 4, 5\}$，求 a.

5. 已知全集 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$A=\{2, 3, 5, 6\}$，$B=\{1, 3, 5, 7\}$.

(1) 求 $(\complement_S A)\cup(\complement_S B)$，$\complement_S(A\cap B)$，并根据结果判定 $(\complement_S A)\cup(\complement_S B)$ 与 $\complement_S(A\cap B)$ 之间的关系；

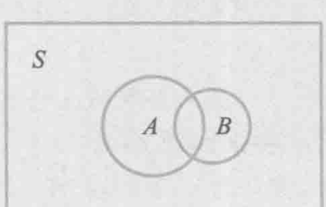
(2) 求 $(\complement_S A)\cap(\complement_S B)$，$\complement_S(A\cup B)$，并根据结果判定 $(\complement_S A)\cap(\complement_S B)$ 与 $\complement_S(A\cup B)$ 之间的关系.

6. 如图 (1) 和 (2)，S 是全集，A，B 都是 S 的子集，分别用阴影表示：

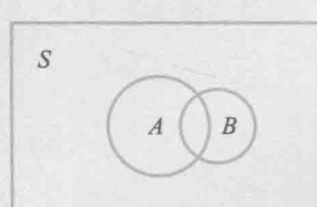
(1) $\complement_S(A\cup B)$；

(2) $(\complement_S A)\cap(\complement_S B)$；

(3) 从图中看出，$\complement_S(A\cup B)$ 与 $(\complement_S A)\cap(\complement_S B)$ 有什么关系？

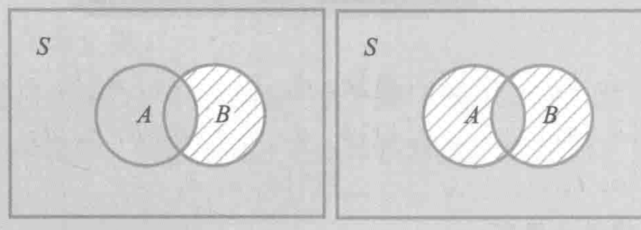


(1)



(2)

*7. 用集合符号表示图中的阴影部分：



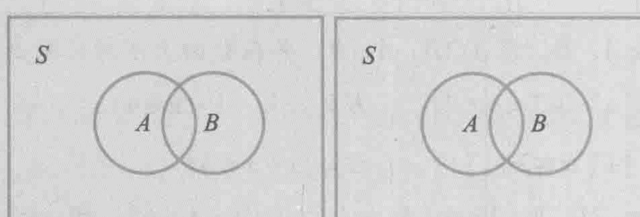
(1)　　　　(2)

8. 如图（1）和（2），S 是全集，A，B 都是 S 的子集，分别用阴影表示：

(1) $\complement_S(A\cap B)$；

(2) $(\complement_S A)\cup(\complement_S B)$；

(3) 从图中看出，$\complement_S(A\cap B)$ 与 $(\complement_S A)\cup(\complement_S B)$ 有什么关系？



(1)　　　　(2)

本教材中标“＊”号的题目均为选作题。

阅读空间

德·摩根与集合问题

德·摩根（De Morgan，Augustus，1806.6.27－1871.3.18），英国人，现代符号逻辑和数理逻辑的奠基人.

德·摩根执教于伦敦大学期间，他开设的数理逻辑课枯燥而乏味，因而学生们对此都大伤脑筋——它太抽象了.

一次，他刚讲完集合运算性质，为了松弛一下学生们的“紧张”气氛，便信手在黑板上写了一道题：

某班有学生15人，其中会英语者有10人，会法语者有7人，会德语者有4人. 另外，同时掌握英、法两种语言的人数为4人，同时掌握英、德两种语言者为2人，同时掌握法、德两种语言者为2人. 请问：同时会三种语言的有几人.

看着学子们的茫然表情，摩根先生淡然一笑，随即在黑板上画了一张图（图1－9），他指着这张图说：“我用这三个圆表示会三种语言的人数.”

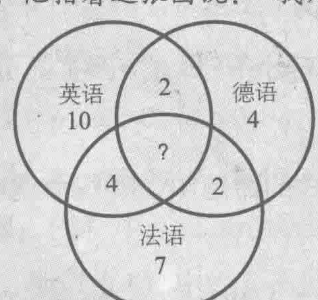


图1－9

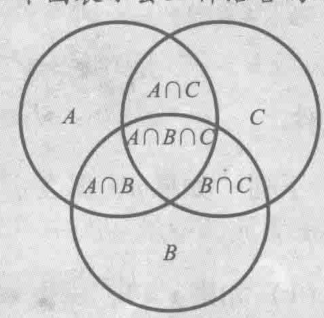


图1－10

说完他又将人数填入圆内，并解释说：“两圆相交部分代表掌握两种语言的人数.”稍微停顿了一下，他接着说：“显然，三圆公共部分表示同时会三种语言的人数.”“如果我们将这些人数分别用 A，B，C，AB，BC，AC 和 ABC 表示(图1－10).”说着，摩根先生在黑板上写下：

$$A+B+C-(AB+AC+BC)+ABC=15.\text{（全班人数）}$$

这样，

$$
\begin{aligned}
&ABC\text{（会三种外语人数）}\\
&=15-(A+B+C)+(AB+AC+BC)\\
&=15-(10+7+4)+(2+2+4)\\
&=2\text{（人）}.
\end{aligned}
$$

摩根先生刚一停笔，便赢得了全体学生的一片热烈掌声.

1.5 充要条件

工具箱

命题：能够判断真假的陈述句.

在数学和日常语言中，我们经常遇到“如果 p，那么 q”形式的命题，其中有的命题为真命题，有的命题为假命题. 例如，下列两个命题：

(1) 设 x，$y\in\mathbf{R}$，如果 $x=-y$，那么 $x^2=y^2$；

(2) 设 a，$b\in\mathbf{R}$，如果 $ab=0$，那么 $a=0$.

命题(1)为真命题，命题(2)为假命题.

想一想 为什么(1)为真命题，(2)为假命题？

一般地，“如果 p，那么 q”为真命题，是指由 p 通过推理可以得出 q. 这时，我们就说，由 p 可推出 q，记做

$$p\Rightarrow q,$$

并且说 p 是 q 的**充分条件**，q 是 p 的**必要条件**.

上面的命题（1）是真命题，即

$$x=-y\Rightarrow x^2=y^2,$$

所以“$x=-y$”是“$x^2=y^2$”的充分条件，“$x^2=y^2$”是“$x=-y$”的必要条件.

例1 下列“如果 p，那么 q”形式的命题中，哪些命题中的 p 是 q 的充分条件？

(1) 如果 $x=1$，那么 $x^2-4x+3=0$；

(2) 如果 x 为无理数，那么 x^2 为无理数.

解：命题（1）是真命题，命题（2）是假命题. 所以，命题（1）中的 p 是 q 的充分条件.

工具箱

当 $a\geqslant 0$ 时，$(\sqrt{a})^2=a$，如 $(\sqrt{2})^2=2$.

如果“如果 p，那么 q”为假命题，那么由 p 推不出 q，记做 $p\nRightarrow q$. 此时，我们就说 p 不是 q 的充分条件，q 不是 p 的必要条件.

例如，例1中的命题（2）是假命题，那么

$$x\text{ 为无理数}\nRightarrow x^2\text{ 为无理数},$$

所以“x 为无理数”不是“x^2 为无理数”的充分条件，“x^2 为无理数”不是“x 为无理数”的必要条件.

例2 下列“如果 p，那么 q”形式的命题中，哪些命题中的 q 是 p 的必要条件？

（1）如果两个三角形全等，那么这两个三角形的面积相等；

（2）如果 $a>b$，那么 $ac>bc$.

解：命题（1）是真命题，命题（2）是假命题. 所以，命题（1）中的 q 是 p 的必要条件.

议一议

已知 p：三角形的三条边相等，q：三角形的三个角相等，那么 p 是 q 的什么条件？q 又是 p 的什么条件？

在上述问题中，$p \Rightarrow q$，所以 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件. 另一方面，$q \Rightarrow p$，所以 p 也是 q 的必要条件，q 也是 p 的充分条件.

一般地，如果既有 $p \Rightarrow q$，又有 $q \Rightarrow p$，就记做

$$p \Leftrightarrow q.$$

此时，我们说，p 是 q 的充分必要条件，简称**充要条件**. 显然，如果 p 是 q 的充要条件，那么 q 也是 p 的充要条件.

例3 下列各题中，哪些 p 是 q 的充要条件？

（1）p：$x>0$，$y>0$，q：$xy>0$；

（2）p：$a>b$，q：$a+c>b+c$.

解：（2）中，$p \Leftrightarrow q$，所以（2）中的 p 是 q 的充要条件. 在（1）中，$q \nRightarrow p$，所以（1）中的 p 不是 q 的充要条件.

练习

下列“如果 p，那么 q”形式的命题中，哪些命题中的 p 是 q 的充分条件？哪些命题中的 p 是 q 的必要条件？哪些命题中的 p 是 q 的充要条件？

（1）如果 $x>5$，那么 $x>10$；

（2）如果 $a+5$ 是无理数，那么 a 是无理数；

（3）如果 $(x-a)(x-b)=0$，那么 $x=a$；

（4）如果二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac \geqslant 0$，那么这个方程有实数根.

习题 五

1. 用“充分条件”、“必要条件”或“充要条件”填空：

(1) x 为自然数是 x 为整数的________；

(2) $x>3$ 是 $x>5$ 的________；

(3) $x=3$ 是 $x^2-2x-3=0$ 的________；

(4) $x<5$ 是 $x<3$ 的________；

(5) $x^2-4=0$ 是 $x+2=0$ 的________；

(6) 两个三角形的三边对应相等，是两个三角形全等的________.

2. 判断下列命题的真假：

(1) “$a>b$” 是 “$a^2>b^2$” 的充分条件；

(2) “$|a|>|b|$” 是 “$a^2>b^2$” 的必要条件；

(3) “$a>b$” 是 “$ac^2>bc^2$” 的充分条件.

归纳与总结

1. 知识要点

(1) 集合及其表示法

某些指定对象集中在一起就成为一个集合，集合中的每个对象叫做这个集合的一个元素. 如果 c 是集合 A 的元素，就说 c 属于 A，记做________，否则就说 c 不属于 A，记做________.

集合中的元素有确定性、________、________.

不含任何元素的集合叫做________，用符号________表示.

常见的集合有：自然数集________，正整数集 $\mathbf{N}_+$，整数集________，有理数集________，实数集________.

表示集合的方法通常有两种：________，________.

(2) 集合之间的关系

有的集合之间有包含关系，即 $B \subseteq A$（或者说，$A \supseteq B$）. 这时称 B 是 A 的________. 进一步，如果 A 中至少有一个元素不属于它的子集 B，则称 B 是 A 的________.

如果________且________，则称 A 与 B 相等，记做 $A = B$.

空集是任何集合的________.

空集是任何非空集合的________.

(3) 集合的运算

并集 $A \cup B =$________________；

交集 $A \cap B =$________________；

补集 $\complement_S A =$________________，

其中 S 是全集，A 是 S 的子集.

(4) 充要条件

如果已知 $p \Longrightarrow q$，那么我们说，p 是 q 的________，q 是 p 的________，如果已知________________，那么我们说，p 是 q 的充要条件.

2. 重点与难点

本单元学习的重点是集合的概念及各种符号的意义. 难点是对集合的概念及其各种符号的准确理解与区分，如元素与集合，子集与真子集，属于与包含于，交集与并集等.

区别元素与集合的概念，特别是一个元素构成的集合，例如 $\{a\}$，要与它的元素加以区别，a 与 $\{a\}$ 是完全不同的，a 是一个元素，而 $\{a\}$ 是一个集合. 如同一个国家代表团只有一人，这个人本身和由这个人构成的代表

团完全不是一回事.

区别子集与真子集的概念，其中真子集是子集的一部分. 对于一个集合而言，它的真子集总比子集少 1 个. 少的恰恰就是与原集合相等的那个子集.

区别属于关系与包含于关系，主要需要认清它们的使用范围. 属于关系指的是元素与集合的关系，是一种个体与整体的关系，在属于的符号 $\in$ 的前后应分别是元素与集合. 而包含于关系指的是两个集合之间的关系，是部分与整体的关系，在包含于符号 $\subseteq$ 的两边都是集合.

区别交集与并集，主要要认清这两种运算是如何定义的. 交集是由两个集合的公共元素组成的集合，而并集则是由两个集合的所有元素组成的集合. 当然，依据集合元素的互异性，求得的并集中，不可有重复元素出现.

例1 已知集合 $M=\{x\in\mathbf{Z}\mid 2<x\leqslant 6\}$，集合 $N=\{x\mid x^2-8x+15=0\}$，

(1) 用列举法表示集合 M 与 N;

(2) 求 $M\cap N$ 和 $M\cup N$;

(3) 求 $\complement_M N$;

(4) 写出集合 $\complement_M N$ 的全部子集.

解：(1) $M=\{3, 4, 5, 6\}$，$N=\{3, 5\}$；

(2) $M\cap N=\{3, 5\}$，$M\cup N=\{3, 4, 5, 6\}$；

(3) $\complement_M N=\{4, 6\}$；

(4) $\complement_M N$ 的子集有 $\varnothing$，$\{4\}$，$\{6\}$，$\{4, 6\}$.

例2 已知集合 $A=\{a, b, c\}$，

(1) 如果集合 B 满足 $A\cup B=A$，试问这样的集合 B 有多少个?

(2) 如果集合 B 满足 $A\cap B=B$，试问这样的集合 B 有多少个?

解：(1) $\because$ $A\cup B=A$，$\therefore$ $B\subseteq A$，而 $A=\{a, b, c\}$，

$\therefore$ 满足要求的集合 B 有 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$，$\{a, b, c\}$，共 8 个.

(2) $\because$ $A\cap B=B$，$\therefore$ $B\subseteq A$，

同样，满足要求的集合 B 有 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$，$\{a, b, c\}$，共 8 个.

综合练习一

A 组

1. 填空题:

(1) 属于用符号______表示，包含于用符号______表示;

(2) 集合 $\{a, b\}$ 的表示方法叫做______法，集合 $\{x \mid x>1\}$ 的表示方法叫做______法;

(3) 若 $\{1, 2, 3\}=\{1, 3, x\}$，则 $x=$______;

(4) 若 $\{1, 2, 3\}=\{1, x, y\}$，则 $x=$______，$y=$______或 $x=$______，$y=$______;

(5) 若集合 $A=\{1, 2\}$，$B=\{2, 3\}$，则 $A \cap B=$______;

(6) 若集合 $A=\{1, 2\}$，$B=\{2, 3\}$，则 $A \cup B=$______.

2. 选择题:

(1) 下列各题中所指的对象，能组成集合的是（　　）;

A. 非常接近 0 的数　　B. 高一年级学习好的学生

C. 大于 2 的自然数　　D. 好看的衣服

(2) 下列结论中正确的是（　　）;

A. $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}=\{1, 2, 3, 3, 4, 5\}$

B. $\{0, 1, 2\} \cap \{-1, -2, 0\}=\varnothing$

C. $\complement_U \varnothing=U$

D. $\{x \mid x^2=x\}=\{1\}$

(3) 若 $M=\{m\}$，则下列结论正确的是（　　）;

A. $M=m$　　B. $m \not\subseteq M$　　C. $m \in M$　　D. $m \notin M$

(4) 下列结论中正确的是（　　）.

A. $0 \subsetneqq \{0, 1\}$　　B. $0 \in \{0\}$　　C. $\varnothing=\{0\}$　　D. $\varnothing=0$

3. 用列举法写出下列集合.

(1) $\{x \mid -1 \leqslant x<5$ 且 x 是偶数$\}$;

(2) $\{x \mid -1 \leqslant x<5$ 且 x 是奇数$\}$;

(3) $\{x \in \mathbf{N} \mid -1 \leqslant x<5\}$;

(4) $\{x \in \mathbf{Z} \mid -1 \leqslant x<5\}$.

4. 已知集合 $A=\{0, 2, 4\}$，$B=\{0, 1, 3\}$，求 $A \cap B$ 与 $A \cup B$.

5. 已知集合 $A=\{x \mid 0<x<5\}$，$B=\{x \mid 1<x<6\}$，求 $A \cap B$ 与 $A \cup B$.

6. 已知集合 $A=\{x \mid x>2\}$，$B=\{x \mid x<3\}$，求 $A\cap B$ 与 $A\cup B$.

7. 已知全集 $U=\{x\in\mathbf{Z} \mid 0<x\leqslant 8\}$，集合 $A=\{2, 7, 8\}$，$B=\{3, 5, 6, 7\}$. 求

(1) $\complement_U A$ 与 $\complement_U B$； (2) $A\cap(\complement_U B)$ 与 $(\complement_U A)\cup B$.

8. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x \mid x\geqslant 1\}$，求 $\complement_U A$.

9. "$a\in\mathbf{R}$" 是 "$a\in\mathbf{Q}$" 的什么条件?

10. "$xy=0$" 是 "$x=0$" 的什么条件?

B 组

1. 选择题：

(1) 设集合 $M=\{x \mid x\leqslant 3\}$，$a=2\sqrt{3}$，则（ ）；

A. $\{a\}\subsetneqq M$ B. $a\subsetneqq M$ C. $a\notin M$ D. $\{a\}\in M$

(2) 设集合 $A=\{x \mid x\geqslant 2\}$，$B=\{x \mid x^2-x-2=0\}$，则 $A\cup B=$（ ）；

A. $\varnothing$ B. A C. $A\cup\{-1\}$ D. B

(3) 设 $\{a, b\}\subsetneqq M\subseteq\{a, b, c, d\}$，则满足条件的集合 M 共有（ ）；

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

(4) 设 I 为全集，P，Q 为 I 的子集，且 $Q\subsetneqq P$，则下列结论中不正确的是（ ）.

A. $P\cap Q=Q$ B. $(\complement_I P)\cap Q=\varnothing$

C. $P\cup(\complement_I Q)=I$ D. $(\complement_I P)\cap\complement_I Q=\complement_I Q$

2. 下面的几个结论都是错的，请说明理由：

(1) $A\cap B\subsetneqq A$； (2) $A\subsetneqq A\cup B$；

(3) $\varnothing\subsetneqq A\cap B$； (4) $A\cap B\subsetneqq A\cup B$.

3. 已知全集 $I=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x \mid -2\leqslant x<3\}$，求 $\complement_I A$.

4. 已知集合 $A=\{a, a^2, ab\}$，$B=\{1, a, b\}$，且 $A=B$，求实数 a，b 的值.

5. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-px+15=0\}$，$B=\{x \mid x^2-5x+q=0\}$，且 $A\cap B=\{3\}$，求 $A\cup B$.

6. 已知集合 $A=\{a^2, a+2, -5\}$，$B=\{10, 3a-5, a^2+3\}$，且 $A\cap B=\{-5\}$，求实数 a.

阅读空间

康托儿与集合论

在世界数学史上，康托儿是一位成绩斐然的数学家，他以杰出的才能和大无畏的精神，创造了数学中的一个全新领域——集合论.

康托儿（Georg Cantor，1845.3.3—1918.1.6）出生在俄国圣彼得堡的一个犹太人家庭，后随父母移居德国，当时他只有11岁. 康托儿自幼好学，善于独立思考问题，对数学有特殊兴趣，这一点明显与同龄儿童不一样. 他的这些优良品德和数学素质，对他以后在数学领域所取得的巨大成就和对人类的伟大贡献有一定的促进作用.

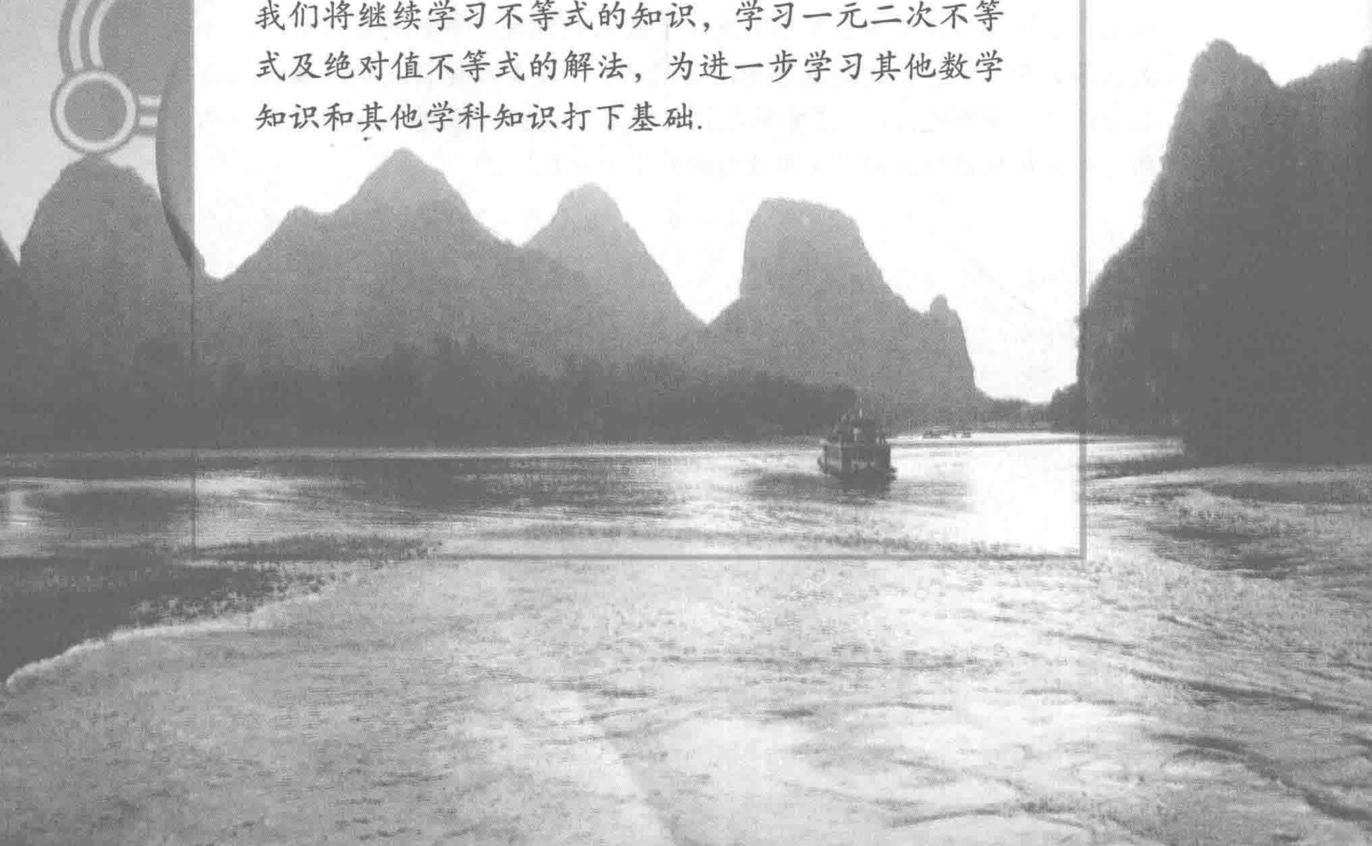
康托儿是集合论的创始人. 由于康托儿在集合论方面的工作富有创新性、革命性，推翻了前人的许多错误看法，一时不能为人所理解，甚至遭到大多数数学家的嘲讽乃至攻击，称集合论为“疾病”，“雾中之雾”，称康托儿为“疯子”. 可是真理是不可战胜的，事实证明康托儿的集合论对整个现代数学的结构起了重大影响. 它在数学的不少分支得到了应用. 特别是进入20世纪以来，集合论吸引了许多数学家进一步深入地研究，并取得巨大成绩. 正像大数学家希尔伯特在谈到集合论时所说的：“没有人能把我们从康托儿为我们创造的乐园中赶走”，并赞誉康托儿的集合论为“数学思想的最惊人的产物，在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现”.

第二单元　不等式

回顾与思考

“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”，你肯定能体会其中蕴涵的不等关系．与等量关系一样，不等量关系也是自然界中存在着的基本数量关系，它们在现实世界和日常生活中大量存在，在数学研究和数学应用中也起着重要的作用．

在初中阶段，我们已经学习了一些有关不等式的概念和性质，学习了一元一次不等式及一元一次不等式组的解法，对不等式有了初步了解．这一章我们将继续学习不等式的知识，学习一元二次不等式及绝对值不等式的解法，为进一步学习其他数学知识和其他学科知识打下基础．



2.1 不等式的基本性质

在初中阶段，我们学习过有关实数的基本性质：对于任意两个实数 a 和 b，

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b;$$

$$a-b=0 \Leftrightarrow a=b;$$

$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b.$$

也就是说，要比较两个实数 a 和 b 的大小，可以将它们相减，判断它们的差 $a-b$. 如果 $a-b$ 是正数，那么 $a>b$；如果 $a-b$ 是零，那么 $a=b$；如果$a-b$是负数，那么 $a<b$，反之也成立.

这个性质把实数的大小比较与减法运算结果联系起来，是比较实数大小的一种基本指导思想.

例1 比较$\frac{4}{5}$与$\frac{5}{6}$的大小.

解：$\because$ $\frac{4}{5}-\frac{5}{6}=\frac{24}{30}-\frac{25}{30}=-\frac{1}{30}<0$,

$\therefore$ $\frac{4}{5}<\frac{5}{6}$.

例2 比较$-\frac{2}{3}$与$-\frac{3}{4}$的大小.

解：$\because$ $\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{8}{12}-\left(-\frac{9}{12}\right)=\frac{1}{12}>0$,

$\therefore$ $-\frac{2}{3}>-\frac{3}{4}$.

工具箱

分数的加减法分两种情况：

(1) 分母相同的两个分数相加减，分母不变，分子相加减，如 $\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=\frac{4-1}{7}=\frac{3}{7}$；

(2) 分母不同的两个分数相加减，先通分，将其化为分母相同的两个分数再相加减，如$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$.

练一练

比较下列各对实数的大小：

(1) $\frac{3}{4}$与$\frac{5}{7}$；　　(2) $-\frac{4}{5}$与$-\frac{2}{3}$.

例3 比较 x^2 与 $(x+1)(x-1)$ 的大小.

解： $\because\ x^2-(x+1)(x-1)$

$=x^2-(x^2-1)$

$=1>0$,

$\therefore\ x^2>(x+1)(x-1)$.

例4 比较 $(a+3)(a-5)$ 与 $(a+2)(a-4)$ 的大小.

解： $\because\ (a+3)(a-5)-(a+2)(a-4)$

$=(a^2-2a-15)-(a^2-2a-8)$

$=-7<0$,

$\therefore\ (a+3)(a-5)<(a+2)(a-4)$.

工具箱

多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

例如，$(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn$.

常用的乘法公式有：

平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,

完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

练一练

比较下列两个代数式的大小：

(1) $(x+1)(x+2)$ 与 $(x-3)(x+6)$；(2) $(x+1)^2$ 与 $2x$.

从实数的基本性质出发，可以证明不等式的下列基本性质.

性质1 （传递性）如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$.

证明： $\because\ a>b$，$b>c$,

$\therefore\ a-b>0$，$b-c>0$,

而两个正数之和仍然是正数，

$\therefore\ (a-b)+(b-c)>0$,

即 $a-c>0$,

$\therefore\ a>c$.

性质 2　（**加法法则**）如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$.

证明：$\because\quad a>b$,

$\therefore\quad a-b>0$.

于是

$$
\begin{aligned}
& a+c-(b+c)\\
&=(a-b)+(c-c)\\
&=a-b>0,
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad a+c>b+c$.

练一练　证明：如果 $a+b>c$，那么 $a>c-b$.

性质 3　（**乘法法则**）如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$；如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc$.

证明：$\because\quad a>b$,

$\therefore\quad a-b>0$.

而两个正数之积仍为正数，正数与负数之积为负数.

$\therefore$　当 $c>0$ 时，$(a-b)c>0$，即 $ac-bc>0$，

$\therefore\quad ac>bc$；

当 $c<0$ 时，$(a-b)c<0$，即 $ac-bc<0$，

$\therefore\quad ac<bc$.

练习

1. 比较下列两个代数式的大小：

（1）$\dfrac{5}{6}$与$\dfrac{7}{8}$；　　（2）$-\dfrac{8}{9}$与$-\dfrac{6}{7}$.

2. 比较下列两个代数式的大小：

（1）$(x+3)(x-1)$ 与 $(x+6)(x-4)$；

（2）$(x+4)^2$ 与 $(x+2)(x+6)$.

3. 证明：如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a+c>b+d$.

4. 证明：如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $ac>bd$.

习题 一

1. 比较下列各组中两个实数的大小：

(1) $-\frac{8}{9}$与$-\frac{7}{8}$；　　(2) $\frac{7}{6}$与$\frac{6}{5}$．

2. 比较下列各组中两个代数式的大小：

(1) $(x-1)^2$ 与 $x(x-2)$；

(2) $(x-2)(x-4)$ 与 $(x-1)(x-5)$．

3. 判断下列各结论是否正确，并说明理由．

(1) 如果 $a>b$，那么 $a-c>b-c$；

(2) 如果 $a>b$，那么 $ac>bc$；

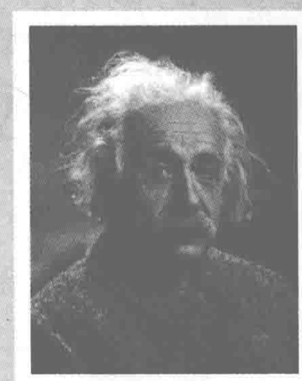
(3) 如果 $a>b$，那么 $-a<-b$；

(4) 如果 $a>b$，那么$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

4. 证明：如果 $a>b$，那么 $c-2a<c-2b$.

阅读空间

爱因斯坦的速算



爱因斯坦（Albert Einstein，1879. 3. 14 - 1955. 4. 18）是一位著名的物理学家，他在数学方面也有很高的造诣．

有一天，他生病在家．一位朋友前去探望，为了让爱因斯坦消遣，出了一道计算题：2976×2924．题目刚刚出完，爱因斯坦就脱口而出“8701824”．这位朋友十分惊讶，他请爱因斯坦说出是怎样计算的．爱因斯坦说，他把 2976 拆成 29 和 76，把 2924 拆成 29 和 24，他发现前面两位数字都是 29，后面两位数字分别是 76 和 24，而它们的和是 100．分别计算 $29\times(29+1)=29\times30=870$，$76\times24=(50+26)(50-26)=50^2-26^2=1824$，然后将 870 和 1824 连着写出来，就得到乘积 8701824．这位朋友对爱因斯坦善于观察数字特征，灵活运用数学知识的能力十分佩服．

那么，爱因斯坦速算的理论根据是什么？

设 $29=a$，$76=b$，$24=c$，则

$$2976=100a+b,\ 2924=100a+c,$$

且 $$b+c=100.$$

由
$$\begin{aligned}&(100a+b)(100a+c)\\&=10000a^2+100a(b+c)+bc\\&=10000a^2+100a\times100+bc\\&=10000a(a+1)+bc.\end{aligned}$$

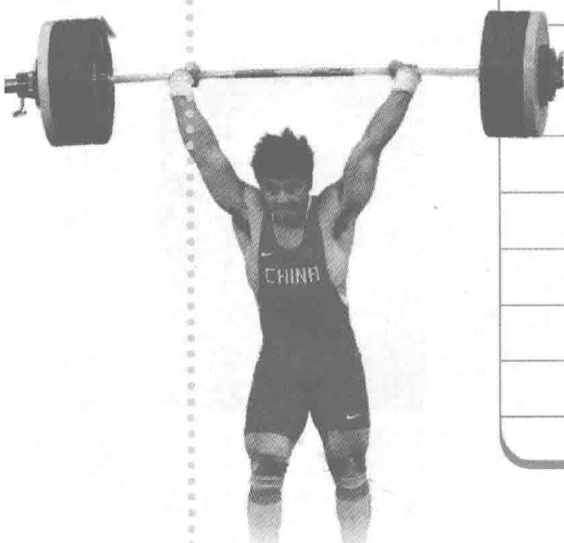
这样，
$$\begin{aligned}&2976\times2924\\&=10000\times29\times(29+1)+76\times24\\&=870\times10000+1824\\&=8701824.\end{aligned}$$

你通过爱因斯坦速算的故事，可以想到什么呢？

2.2 区间的概念

引例

奥运会举重比赛分双手抓举和双手挺举两个项目，以运动员体重级别的最高限度作为级别的名称. 例如，男子项目共设 8 个级别，如下表：



男子项目	级别表示
56公斤级	体重不超过56公斤
62公斤级	56.01～62
69公斤级	56.01～69
77公斤级	69.01～77
85公斤级	77.01～85
94公斤级	85.01～94
105公斤级	94.01～105
105公斤以上级	体重超过105公斤

这其中就蕴含着我们所要学习的区间概念.

在初中，我们学习过一元一次不等式（组）的解法，并且知道能使不等式成立的未知数值的全体组成的集合，叫做不等式的解集. 例如，不等式

$$2x-1>0$$

的解集可以表示成

$$\{x \mid 2x-1>0\}.$$

其实，不等式的解集还可以用另一种更为简单的表示形式，那就是区间.

开区间 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数集合，叫做**开区间**，记做 (a, b). 在数轴上用介于 a，b 两点之间而不包括端点的一条线段上所有的点表示，如图 2－1，也可以用形如 $\{x \mid a<x<b\}$ 的集合表示.

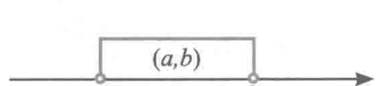


图 2－1

闭区间 满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有实数集合，叫做**闭区间**，记做 $[a, b]$. 在数轴上用介于 a，b 两点之间并包括端点在内的一条线段上所有的点表示，如图 2-2，也可以用形如 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 的集合表示.

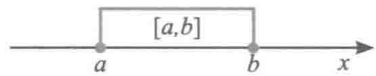


图 2-2

半开半闭区间 满足不等式 $a \leqslant x < b$ 或 $a < x \leqslant b$ 的所有实数集合，叫做**半开半闭区间**，分别记做 $[a, b)$ 或 $(a, b]$. 其中 $[a, b)$ 在数轴上用介于 a，b 两点之间并包括 a 点而不包括 b 点的一条线段上所有的点表示，如图 2-3，也可以用形如 $\{x \mid a \leqslant x < b\}$ 的集合表示；$(a, b]$ 在数轴上用介于 a，b 两点之间而不包括 a 点但包括 b 点的一条线段上所有的点表示，如图 2-4，也可以用形如 $\{x \mid a < x \leqslant b\}$ 的集合表示.

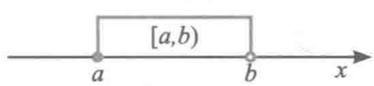


图 2-3

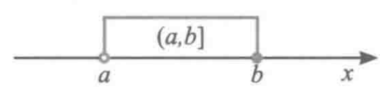


图 2-4

实数集 **R** 也可以用区间 $(-\infty, +\infty)$ 表示，"∞" 读做 "无穷大"，但它不是一个具体的数，只是一个记号. 它的前面的 "+" 和 "−" 号表示方向，例如，"$+\infty$" 表示数在数轴上向正的方向无限变大.

满足不等式 $x \geqslant a$，$x \leqslant b$ 和 $x > a$，$x < b$ 的实数 x 的集合，可分别记做 $[a, +\infty)$，$(-\infty, b]$ 和 $(a, +\infty)$，$(-\infty, b)$. 它们可以分别用数轴上的射线（如图 2-5）和不含端点的射线（如图 2-6）上所有的点表示.

图 2-5

图 2-6

从以上的例子中可以看出：一个与实数相关的集合可以用不等式、区间或集合等多种形式表示；也可以用数轴上对应的点集表示. 在使用时，可以根据需要灵活运用.

例1 用区间表示下列不等式的解集，并用数轴表示这些区间.

(1) $1<x<2$；　　(2) $0\leqslant x<1$；

(3) $x>4$；　　(4) $x\leqslant -1$.

解：(1) $(1,\ 2)$；　　(2) $[0,\ 1)$；

(3) $(4,\ +\infty)$；　　(4) $(-\infty,\ -1]$.

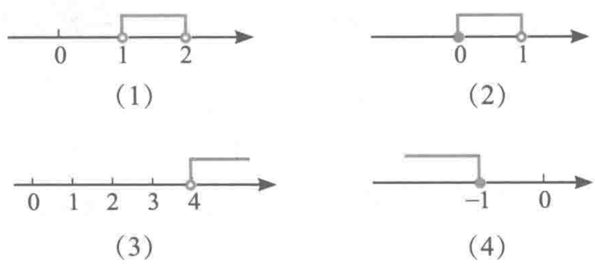


图 2－7

例2 用集合的描述法表示下列区间：

(1) $[-2,\ 1]$；　　(2) $(3,\ 5]$.

解：(1) $\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$；

(2) $\{x \mid 3<x\leqslant 5\}$.

例3 已知集合 $A=\{x \mid x>5\}$，$B=\{x \mid x>-3\}$，求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$，并用区间及数轴上的点集表示.

解：$A\cap B=\{x \mid x>5\}\cap\{x \mid x>-3\}=\{x \mid x>5\}$；

用区间表示，即 $A\cap B=(5,\ +\infty)\cap(-3,\ +\infty)=(5,\ +\infty)$；

$A\cup B=\{x \mid x>5\}\cup\{x \mid x>-3\}=\{x \mid x>-3\}$；

用区间表示，即 $A\cup B=(5,\ +\infty)\cup(-3,\ +\infty)=(-3,\ +\infty)$.

数集 $A\cap B$，$A\cup B$ 在数轴上对应的点集如图 2－8 所示.

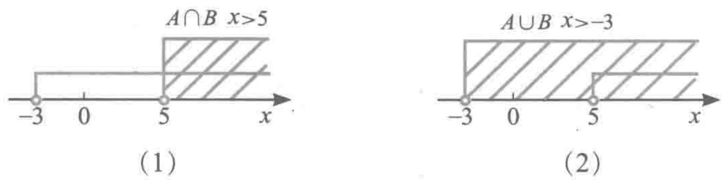


图 2－8

练习

1. 用区间表示下列不等式的解集，并用数轴表示这些区间：

(1) $x<-2$；　　(2) $2<x<5$；

(3) $x\leqslant 2$；　　(4) $\mathbf{R}$.

2. 用集合的描述法表示下列区间：

(1) $(2, 3)$；　　(2) $[-3, 1]$；

(3) $(-\infty, 2)$；　　(4) $[1, +\infty)$.

3. 已知集合 $A=\{x \mid x>1\}$，$B=\{x \mid x<2\}$，求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$，并用区间表示.

习题 二

1. 用区间表示下列不等式的解集，并在数轴上表示这些区间：

(1) $-2\leqslant x\leqslant 3$；　　(2) $-3<x<4$；

(3) $-2\leqslant x<3$；　　(4) $-3<x\leqslant 4$；

(5) $x>3$；　　(6) $x\leqslant 4$.

2. 解下列不等式组，并把解集用区间及数轴上的点集表示：

(1) $\begin{cases}4x-4>3x+1,\\3x+1>2x-1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x+3<4,\\x+3>-1.\end{cases}$

3. 求下列各题中的 $A\cap B$ 和 $A\cup B$，并分别用区间、集合和数轴上对应的点集把它们表示出来：

(1) $A=\{x \mid x<5\}$，$B=\{x \mid x<-3\}$；

(2) $A=(-3, +\infty)$，$B=(-\infty, 5)$；

(3) $A=(-\infty, -3)$，$B=(5, +\infty)$.

4. (1) 当 x 在 $(-\infty, -5)$，$(-5, 0)$，$(0, 5)$，$(5, +\infty)$ 内分别取值时，试确定 x^2-25 的值的符号；

*(2) 已知 $x\in(-\infty, 10)$，试确定 $x+10$，$x-10$，$5-x$，$\frac{1}{5}x-4$ 的值的范围.

2.3 一元二次不等式

引例

甲、乙两辆汽车相向而行，在一个弯道上相遇，弯道限制车速在 40km/h 以内，由于突发情况，两车相撞了．交警在现场测得甲车的刹车距离接近但未超过 12m，乙车的刹车距离刚刚超过了 10m，又知这两辆汽车的刹车距（s）与车速 x（km/h）之间分别有以下关系：

$$s_{甲}=0.01x^2+0.1x,$$

$$s_{乙}=0.005x^2+0.05x,$$

谁的车速超过了 40km/h，谁就违章了．

试问：哪一辆车超速行驶？

由题意，只需分别解出不等式 $0.01x^2+0.1x\leqslant 12$ 和 $0.005x^2+0.05x>10$，确认甲、乙两车的行驶速度，就可以判断哪一辆车违章超速行驶．

像上面的形如 $ax^2+bx+c>0$（$\geqslant 0$）或 $ax^2+bx+c<0$（$\leqslant 0$）的不等式（其中 $a\neq 0$），叫做**一元二次不等式**．

议一议　如何确定一元二次不等式的解集？

1. 分解因式法

我们学习过用提取公因式法和公式法解一元二次方程，同样的方法也可以用来解一元二次不等式．

例1 求下列不等式的解集：

（1）$x^2-3x>0$；　　　　（2）$2x^2<-x$；

（3）$x^2-9>0$.

解：（1）$\because$ $x^2-3x=x(x-3)$，

从而得　$x(x-3)>0$.

$\therefore$　原不等式可以化成下面两个不等式组：

$$①\begin{cases}x>0,\\x-3>0\end{cases}\quad 或\quad ②\begin{cases}x<0,\\x-3<0.\end{cases}$$

①的解集是 $\{x \mid x>3\}$；②的解集是 $\{x \mid x<0\}$.

$\therefore$ 原不等式的解集是①，②解集的并集，即

$$\{x \mid x>3\} \cup \{x \mid x<0\} = \{x \mid x<0 \text{ 或 } x>3\} .$$

（2）原不等式经过整理，得 $2x^2+x<0$.

$\because$ $2x^2+x=x(2x+1)$,

从而得 $x(2x+1)<0$.

$\therefore$ 原不等式可以化成下面两个不等式组：

①$\begin{cases} x>0, \\ 2x+1<0 \end{cases}$ 或 ②$\begin{cases} x<0, \\ 2x+1>0. \end{cases}$

①的解集是空集；②的解集是 $\{x \mid -\frac{1}{2}<x<0\}$.

$\therefore$ 原不等式的解集是①、②解集的并集，即

$$\{x \mid -\frac{1}{2}<x<0\} \cup \varnothing = \{x \mid -\frac{1}{2}<x<0\} .$$

（3）用平方差公式，得

$(x-3)(x+3)>0$,

$\therefore$ 原不等式可以化成下面两个不等式组：

①$\begin{cases} x-3>0, \\ x+3>0 \end{cases}$ 或 ②$\begin{cases} x-3<0, \\ x+3<0. \end{cases}$

①的解集是 $\{x \mid x>3\}$；②的解集是 $\{x \mid x<-3\}$.

$\therefore$ 原不等式的解集是①、②解集的并集，即

$$\{x \mid x>3\} \cup \{x \mid x<-3\} = \{x \mid x>3 \text{ 或 } x<-3\} .$$

在一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（或 <0）中，如果左边的二次三项式 ax^2+bx+c（$a\neq0$）可以分解成两个一次因式乘积的形式，那么根据乘法的符号法则（两数相乘，同号得正，异号得负），就可以将一元二次不等式转化成两个一元一次不等式组求解. 这种解法叫做一元二次不等式的**分解因式解法**.

除了我们熟悉的提取公因式法、公式法可将部分二次三项式分解外，事实上更一般的方法为：

如果 $x^2+bx+c=0$ 有两个实数根 x_1、x_2，则 x^2+bx+c 可以分解为 $(x-x_1)(x-x_2)$. 这样利用一元二次方程求根公式，可达到分解二次三项式的目的.

例2 求下列不等式的解集：

（1）$x^2-2x-3>0$；　　（2）$x^2<6-x$.

解：（1）利用求根公式解得 $x^2-2x-3=0$ 的两个根为

$x_1=-1$，$x_2=3$.

$\therefore$　x^2-2x-3 可分解为 $(x+1)(x-3)$，从而得

$(x+1)(x-3)>0$.

$\therefore$　原不等式可以化成下面两个不等式组：

① $\begin{cases}x+1>0,\\x-3>0\end{cases}$　或　② $\begin{cases}x+1<0,\\x-3<0.\end{cases}$

①的解集是 $\{x\mid x>3\}$；②的解集是 $\{x\mid x<-1\}$.

$\therefore$　原不等式的解集是①，②解集的并集，即

$\{x\mid x<-1\}\cup\{x\mid x>3\}=\{x\mid x<-1 \text{ 或 } x>3\}$：

不等式的解集还可以用区间表示为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$，用数轴表示如图 2-9.

图 2-9

（2）原不等式经过整理，得　$x^2+x-6<0$，

利用求根公式解得 $x^2+x-6=0$ 的两个根为

$x_1=-3$，$x_2=2$.

$\therefore$　x^2+x-6 可分解为 $(x+3)(x-2)$，从而得

$(x+3)(x-2)<0$.

$\therefore$　原不等式可以化成下面两个不等式组：

① $\begin{cases}x+3>0,\\x-2<0\end{cases}$　或　② $\begin{cases}x+3<0,\\x-2>0.\end{cases}$

①的解集是 $\{x\mid -3<x<2\}$；②的解集是空集.

$\therefore$　原不等式的解集是①，②的解集的并集，即

$\{x\mid -3<x<2\}\cup\varnothing=\{x\mid -3<x<2\}$.

不等式的解集还可以用区间表示为 $(-3,2)$，用数轴表示如图 2-10.

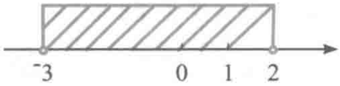


图 2-10

练一练

请同学们解出本节引例中的两个不等式：

$$0.01x^2+0.1x-12\leqslant 0 \text{ 与 } 0.005x^2+0.05x-10>0,$$

并指出哪一辆车超速？

练习

1. 填空题：

（1）不等式组 $\begin{cases}x-1>0,\\x+2<0\end{cases}$ 的解集是________，不等式组 $\begin{cases}x-1<0,\\x+2>0\end{cases}$ 的解集是________，不等式 $(x-1)(x+2)<0$ 的解集是________；

（2）不等式 $x^2\geqslant 1$ 的解集是________.

2. 利用分解因式法求下列不等式的解集：

（1）$4-x^2\geqslant 0$；（2）$x^2-8x+12<0$；

（3）$x^2+3x+2\geqslant 0$；（4）$x^2-3x-28>0$.

2. 图像法

议一议

观察二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图像（如图 2-11），并回答以下问题：

（1）x 的取值范围是什么时，$y=0$?

（2）x 的取值范围是什么时，$y<0$?

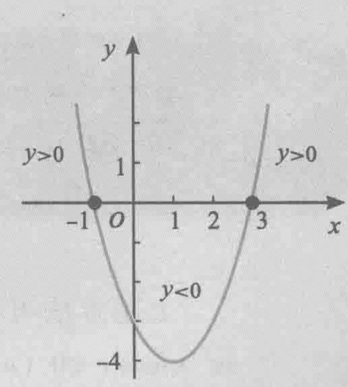


图 2-11

对于（1），就是求一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ 的解，它们是 $x_1=-1$，$x_2=3$，即当 $x_1=-1$ 或 $x_2=3$ 时，$y=0$.

二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图像与 x 轴的交点坐标是 $(-1,0)$

与(3，0).

对于（2），不难看出，当 $-1<x<3$ 时，二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图像在 x 轴的下方满足 $y<0$，也就是说，满足一元二次不等式 $x^2-2x-3<0$ 的 x 的取值范围是 $-1<x<3$.

如果我们求一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（或 <0）的解集，可以先作出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像，然后找到图像在 x 轴上方的点（或下方的点），进而找到上方的点（或下方的点）对应的 x 的范围，就是一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（或 <0）的解集. 这种方法叫做**图像法**.

例3 求不等式 $3x^2+5x-2>0$ 的解集.

解： 方程 $3x^2+5x-2=0$ 的两解是

$$x_1=-2,\ x_2=\frac{1}{3}.$$

函数 $y=3x^2+5x-2$ 的图像是开口向上的抛物线，与 x 轴有两个交点 $(-2,0)$ 和 $\left(\frac{1}{3},0\right)$（如图2－12）. 观察图像可得，不等式的解集为

$$\left\{x \mid x<-2 \text{ 或 } x>\frac{1}{3}\right\}.$$

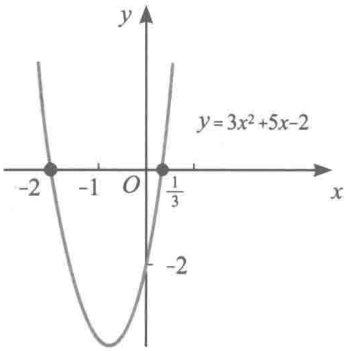


图 2－12

练一练

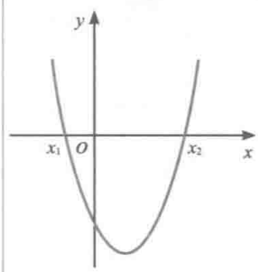
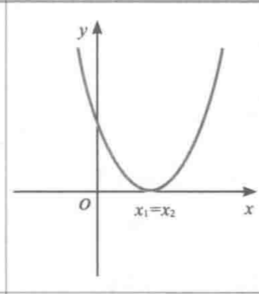
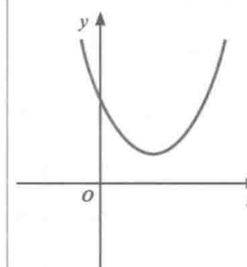
利用图像法求下列不等式的解集：

（1）$x^2-2x-1>0$；　　（2）$2x^2-2x-1<0$.

上述方法可以用于求一般的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集.

我们知道，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$，设 $\Delta=b^2-4ac$，它的解按照 $\Delta>0$，$\Delta=0$，$\Delta<0$ 可分为三种情况．相应的，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图像与 x 轴的位置关系也分为三种情况．因此，我们可分三种情况来讨论对应的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集.

根据上述方法，我们得到：

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 的图像			
$ax^2+bx+c=0$ ($a>0$) 的根	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0$ ($a>0$) 的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\left\{x\mid x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0$ ($a>0$) 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

例4 求不等式 $4x^2-4x+1>0$ 的解集.

解：注意到

$$4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geqslant0,$$

所以原不等式的解集为$\left\{x\mid x\neq\dfrac{1}{2}\right\}$.

练一练

不等式 $x^2+6x+9\geqslant0$ 的解集是什么？
不等式 $x^2+6x+9\leqslant0$ 的解集是什么？
不等式 $x^2+6x+9>0$ 的解集是什么？
不等式 $x^2+6x+9<0$ 的解集是什么？

例5 求不等式 $-x^2+2x-3>0$ 的解集.

解：不等式可化为 $x^2-2x+3<0$.

因为 $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times3=-8<0$，方程 $x^2-2x+3=0$ 无实数根，而 $y=x^2-2x+3$ 的图像开口向上，所以不等式 $x^2-2x+3<0$ 的解集为$\varnothing$，即原不等式的解集为$\varnothing$.

练一练 求不等式 $-3x^2+7x>2$ 的解集.

练习

1. 自变量 x 在什么范围取值时，下列函数的值等于0？大于0呢？小于0呢？

（1）$y=x^2+6x+10$；　　（2）$y=3x^2-6x+2$.

2. 利用图像法求下列不等式的解集：

（1）$4x^2-4x>15$；　　（2）$12x-4x^2-9<0$.

习题 三

1. 填空（把下列不等式的解集填在空格内）：

题号	不等式	解集
(1)	$x^2>0$	
(2)	$x^2<0$	
(3)	$x^2+1>0$	
(4)	$x^2+1<0$	
(5)	$(x-1)^2>0$	
(6)	$(x-1)^2<0$	
(7)	$x^2-1>0$	
(8)	$x^2-1<0$	

2. 求下列不等式的解集：

（1）$x^2\geqslant 9$；　　（2）$x^2>2$；

（3）$x^2<3$；　　（4）$x^2\leqslant 16$；

（5）$x^2<x$.　　（6）$x^2\geqslant x$.

3. 求下列不等式的解集：

（1）$x^2-5x+6<0$；　　（2）$x^2-x-12>0$；

（3）$6x^2+x>-2$；　　（4）$x^2-10x+26<0$.

4. 用图像法求下列不等式的解集：

（1）$4x^2-20x<25$；　　（2）$-3x^2+5x-4>0$；

（3）$x(1-x)>x(2x-3)+1$.

2.4 含绝对值的不等式

我们知道，在实数集 **R** 中

$$|a|=\begin{cases} a & (\text{当 } a>0 \text{ 时}), \\ 0 & (\text{当 } a=0 \text{ 时}), \\ -a & (\text{当 } a<0 \text{ 时}). \end{cases}$$

根据实数的绝对值的意义，有

$$|ab|=|a|\cdot|b|,$$

$$\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{|b|}{|a|}\ (a\neq 0).$$

如果 a 是一个正数，那么

$$|x|<a \Leftrightarrow x^2<a^2 \Leftrightarrow -a<x<a,$$

$$|x|>a \Leftrightarrow x^2>a^2 \Leftrightarrow x>a \text{ 或 } x<-a.$$

即在 $a>0$ 时，

$$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a \ (\text{图 } 2-13\ (1));$$

$$|x|>a \Leftrightarrow x>a \text{ 或 } x<-a \ (\text{图 } 2-13\ (2)).$$

如果 $a\leqslant 0$，那么 $|x|<a$ 的解集为空集.

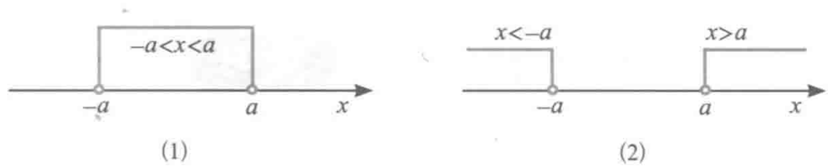


图 2－13

练一练

说出下列不等式的解集：

(1) $|x|<2$；　(2) $|x|>3$；　(3) $|x|>4$；

(4) $4\leqslant|x|$；　(5) $|2x|<3$；　(6) $\left|\frac{x}{3}\right|\geqslant 1$.

例1 求下列不等式的解集：

(1) $|x-3|<5$；　　(2) $|2x+5|>7$.

分析：我们可以把绝对值符号内的式子看做一个整体，设 $x-3=t$ 和 $2x+5=t$，那么两个不等式就分别化为 $|t|<5$ 和 $|t|>7$. 这样根据上述法则，就可以去掉绝对值符号，化为一元一次不等式求解.

学习小贴示

设 $x-3=t$，$2x+5=t$ 体现了数学中等价转化的思想方法，这样就可以将比较繁琐、复杂的问题，转化为我们熟悉、简单的问题来处理.

解：(1) 由原不等式，得 $-5<x-3<5$.

每部分各加上 3，得 $-2<x<8$.

$\therefore$ 原不等式的解集是 $\{x \mid -2<x<8\}$.

(2) 由原不等式，得 $2x+5>7$ 或 $2x+5<-7$.

解得 $x>1$ 或 $x<-6$.

$\therefore$ 原不等式的解集是 $\{x \mid x>1$ 或 $x<-6\}$.

例2 求不等式 $3\leqslant|8-2x|$ 的解集.

解：由原不等式，得 $|8-2x|\geqslant 3$,

也就是 $|2x-8|\geqslant 3$,

$\therefore$ $2x-8\geqslant 3$ 或 $2x-8\leqslant -3$.

解这两个不等式，得

$$x\geqslant\frac{11}{2} \text{ 或 } x\leqslant\frac{5}{2}.$$

$\therefore$ 原不等式的解集是

$$\left\{x \mid x\geqslant\frac{11}{2}\text{或}x\leqslant\frac{5}{2}\right\}.$$

工具箱

一个数的绝对值与它的相反数的绝对值相等，即 $|a|=|-a|$，$|-2|=|2|=2$.

练习

求下列不等式的解集：

(1) $|x|\leqslant 3$;　　(2) $|5x|>8$;

(3) $|2x-3|<5$;　　(4) $|3x+2|>7$.

习题 四

求下列不等式的解集：

(1) $|x|<4$;　　(2) $|x|>4$;

(3) $|x+4|>9$;　　(4) $|2-x|\geqslant 3$;

(5) $|x-2|\geqslant 3$;　　(6) $|2x-3|\leqslant 1$;

(7) $\left|\frac{1}{4}+x\right|\leqslant\frac{1}{2}$;　　(8) $\left|x-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{3}$.

归纳与总结

1. 知识要点

(1) 实数集中的任意两个数都可以比大小，比较大小的方法是：

$a>b\Leftrightarrow$ ________;

$a=b\Leftrightarrow$ ________;

$a<b\Leftrightarrow$ ________.

(2) 不等式的三个基本性质是：

①传递性：如果________，那么________;

②加法法则：如果________，那么________;

③乘法法则：如果________，那么________;

如果________，那么________.

(3) 写出下面各区间表示的数集：

① $(a, b)=$ ________;

② $[a, b]=$ ________;

③ $(a, b]=$ ________;

④ $[a, b)=$ ________;

⑤ $(a, +\infty)=$ ________;

⑥ $(-\infty, a]=$ ________;

⑦ $(-\infty, +\infty)=$ ________;

⑧ $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)=$ ________.

(4) 一元二次不等式的解法 $(a>0)$：

①若方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根是 $x_1<x_2$，则

$ax^2+bx+c>0$ 的解集是________;

$ax^2+bx+c<0$ 的解集是________.

②若方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根是 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$，则

$ax^2+bx+c>0$ 的解集是________;

$ax^2+bx+c<0$ 的解集是________.

③若方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实根，则

$ax^2+bx+c>0$ 的解集是________;

$ax^2+bx+c<0$ 的解集是________.

(5) 含绝对值的一元一次不等式的解法 $(a>0)$：

① $|x|>a$ 的解集是________;

② $|x|<a$ 的解集是________.

2. 重点与难点

本单元学习的重点与难点是一元二次不等式的解法.

用因式分解法解一元二次不等式的步骤为:

第一步　达标

把一元二次不等式整理成标准形式，即

$$ax^2+bx+c>0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<0\ (a>0).$$

注意：必要时将二次项系数化为1，即 $x^2+b_1x+c_1>0$ 或 $x^2+b_1x+c_1<0$.

第二步　分解

把标准形式左边的二次三项式分解因式，写成关于未知数的两个一次二项式的积的形式.

第三步　化组

利用乘积的符号法则，转化成两个一元一次不等式组.

第四步　求组解

分别解每个一元一次不等式组，求出它们的解集.

第五步　定原解

每个一元一次不等式组解集的并集，就是原一元二次不等式的解集.

从函数的观点看，一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a\neq0)$ 的解集就是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ 的图像在 x 轴上方部分的横坐标 x 的集合. 由此，利用二次函数的图像就可以解一元二次不等式.

例　求下列不等式的解集:

(1) $(2x-5)^2<9$;　　(2) $1-x-4x^2>0$.

解：(1) 原不等式可以化成 $(2x-5)^2-3^2<0$,

$\therefore$　$(2x-5+3)(2x-5-3)<0$,

即　$(x-1)(x-4)<0$.

$\therefore$　原不等式可以化成下面两个不等式组:

$$①\begin{cases}x-1>0,\\x-4<0\end{cases}\text{ 或 }②\begin{cases}x-1<0,\\x-4>0.\end{cases}$$

①的解集是 $\{x\mid 1<x<4\}$，②的解集是空集.

$\therefore$　原不等式的解集是 $\{x\mid 1<x<4\}$.

(2) 不等式 $1-x-4x^2>0$ 化为

$$4x^2+x-1<0.$$

因为 $\Delta=1^2-4\times4\times(-1)=17>0$，方程 $4x^2+x-1=0$ 的根是

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{8},\ x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{8}.$$

所以，不等式 $1-x-4x^2>0$ 的解集是 $\left\{x\,\middle|\,\frac{-1-\sqrt{17}}{8}<x<\frac{-1+\sqrt{17}}{8}\right\}$.

综合练习 二

A 组

1. 填空题：

（1）$\frac{6}{13}$与$\frac{11}{25}$中较大的数是________；

（2）$-\frac{5}{17}$与$-\frac{7}{23}$中较小的数是________；

（3）$x^2>9$ 的解集是________；

（4）$x^2<4x$ 的解集是________；

（5）$|x|>\frac{2}{3}$的解集是________；

（6）$|x|<\frac{1}{6}$的解集是________.

2. 选择题：

（1）若 $m>3$，则下列不等式中成立的是（　　）；

A. $m+3>3$　　B. $m-3<0$

C. $m-2>3$　　D. $m-6<-3$

（2）若 $a>0$，$b<0$，则下列不等式中成立的是（　　）；

A. $\frac{b}{a}>0$　　B. $a-b>0$

C. $ab>0$　　D. $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$

（3）下列不等式中正确的是（　　）；

A. $3a>2a$　　B. $3+a>2+a$

C. $3+a>3-a$　　D. $\frac{3}{a}>\frac{2}{a}$

（4）不等式 $x^2+3x+2<0$ 的解集是（　　）；

A. $(1, 2)$　　B. $(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)$

C. $(-2, -1)$　　D. $(-\infty, -2)\cup(-1, +\infty)$

（5）不等式 $x^2+2x+3>0$ 的解集是（　　）；

A. $\{x|1<x<3\}$　　B. $\{x|x<1$ 或 $x<3\}$

C. $\mathbf{R}$　　D. $\varnothing$

（6）不等式 $-|x-5|>-15$ 的解集是（　　）.

A. $\{x|x<20\}$　　B. $\{x|-10<x<20\}$

C. $\{x|x>-10\}$　　D. $\{x|x<-10$ 或 $x>20\}$

3. 比较下列各对代数式的大小：

(1) $(x+1)(x-3)$ 与 $(x-1)^2$；

(2) $(2x+1)(x-3)$ 与 $(x+1)(x-6)$.

4. 解下列不等式，用集合和区间两种形式表示解集：

(1) $x^2-4x-5>0$；　　(2) $x^2+4x-5<0$；

(3) $2x^2+3x+1<0$；　　(4) $3x-2x^2-1<0$.

5. 解下列不等式：

(1) $x^2-x-2>0$；　　(2) $x^2-x+2>0$；

(3) $x^2+2x+1>0$；　　(4) $x^2+2x-1<0$.

6. 解下列不等式：

(1) $|x+3|>5$；　　(2) $|2x+1|<3$.

B　组

1. 选择题：

(1) 若 $a<0$，则下列结论中正确的是（　　）；

A. $a^2<a<2a$　　B. $a<2a<a^2$

C. $2a<a^2<a$　　D. $2a<a<a^2$

(2) 下列不等式中解集为空集的是（　　）；

A. $x^2-2x-3>0$　　B. $x^2-2x-3<0$

C. $x^2-2x+3>0$　　D. $x^2-2x+3<0$

(3) 若 $a<0$，则不等式 $(x-2a)(x+a)<0$ 的解集是（　　）；

A. $\{x\mid -a<x<2a\}$　　B. $\{x\mid x<-a$ 或 $x>2a\}$

C. $\{x\mid 2a<x<-a\}$　　D. $\{x\mid x<2a$ 或 $x>-a\}$

(4) 若 $a<b<0$，则下列不等式正确的是（　　）.

A. $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　B. $\dfrac{a}{b}<1$

C. $\sqrt{-a}<\sqrt{-b}$　　D. $a^2>b^2$

2. 解下列不等式：

(1) $3x^2-7x+2>0$；　　(2) $x(x-1)<x(2x-3)+2$；

(3) $4x^2-4x-1>0$；　　(4) $x^2-4x-6<0$.

3. 解下列不等式：

(1) $\left|\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}\right|<1$；　　(2) $|2-3x|>2$.

阅读空间

华 罗 庚

——自学成才的数学家

华罗庚是我国著名数学家，1910年11月出生于江苏省金坛县一个贫苦家庭. 1924年，他初中毕业因家境贫寒而考入上海中华职业学校学习会计，但因为交不起学费，一年后离开学校，在小杂货铺里帮工当学徒，渴望学习的他，只能利用业余时间刻苦自学数学. 他1929年开始发表论文. 1930年他的一篇数学论文受到清华大学数学系主任熊庆来先生的赞赏，邀请他到清华大学边工作边进修. 在这四年中他打下了坚实的数学基础，并自学了英文、法文和德文. 同期，他仅在数论这一分支就撰写了十几篇高水平的论文，成为一名优秀的青年数学家，并成为清华大学讲师. 1936—1938 年他作为访问学者，到英国剑桥大学工作并深造，抗日战争爆发后回国，受聘为昆明西南联合大学教授. 他白天讲课，晚上在煤油灯下孜孜不倦地从事数学研究，在艰苦的条件下，他完成了著名的《堆垒素数论》. 1946 年，他应美国普林斯顿高等研究院邀请任研究员，并执教. 后被伊利诺大学聘为终身教授. 1950 年，他响应祖国的召唤，毅然从美国回到北京，投身于社会主义建设事业并做出了重大贡献. 1979 年他光荣地加入了中国共产党. 1985 年6 月在访日学术报告的讲台上，不幸逝世. 党和国家对他的一生作出了高度评价. 回顾他的一生，可以说他是自学成才的典范. 他刻苦学习，勤奋钻研的精神永远是我们青年学习的榜样.

第三单元　函　数

回顾与思考

“现实世界中的许多运动变化现象都表现出变量之间的依赖关系.

“神舟”七号载人航天飞船离地面的距离随时间的变化而变化，上网费用随上网时间的变化而变化……

数学上，我们用函数模型描述这种变量间的依赖关系，并通过研究函数的性质了解它们的变化规律.

在初中，我们学习了函数的一些基本概念，并学习了几个具体函数，如正比例函数、反比例函数、一次函数及二次函数.在这一单元，我们将进一步深入学习函数的有关知识，用集合、对应的观点研究函数，加深对函数概念的理解；并通过具体实例，讨论一般函数的性质，初步运用函数思想理解和处理生活、社会中的简单问题.

3.1 函数的概念

想一想

(1) 汽车以60千米/时的速度匀速行驶，行驶里程为s千米，行驶时间为t小时，先填写下面的表，再试用含有t的式子表示s.

t/时	1	2	3	4	5
s/千米					

(2) 每张电影票的售价为50元，如果早场售出票50张，日场售出票105张，晚场售出票170张，三场电影的票房收入各多少元？设一场电影售出票x张，票房收入为y元，怎样用含有x的式子表示y？

(3) 在一根弹簧的下端悬挂重物，改变并记录重物的质量，观察并记录弹簧长度的变化，探索它们的变化规律. 如果弹簧原长10cm，每1kg重物使弹簧伸长0.5cm，怎样用含重物质量m（单位：kg）的式子表示受力后的弹簧长度l（单位：cm）？

(4) 要画一个面积为10cm^2的圆，圆的半径应取多少？圆面积为20cm^2呢？怎样用含有圆面积S的式子表示圆半径r？

这些问题反映了不同的事物的变化过程，其中有些量（例如时间t，里程s；售出票数x，票房收入y；……）的值是按照某种规律变化的. 在一个变化过程中，我们称数值发生变化的量为**变量**. 有些量的数值始终不变，例如上面问题中的速度60（单位：千米/时），票价50（单位：元），……我们称它们为**常量**.

议一议

具体指出上面各问题中，哪些量是变量，哪些量是常量？
每个问题中是否各有两个变量？同一个问题中的变量之间有什么联系？

在问题（1）中，观察填出的表格，你会发现：每当行驶时间t取定一个值时，行驶里程s就随之确定一个值，例如$t=1$，则$s=60$；$t=2$，则$s=120$；…；$t=5$，则$s=300$.

问题（2）中，经计算可以发现：每当售票数量x取定一个值时，票房收入y就随之确定一个值，例如早场$x=50$，则$y=2500$；日场$x=105$，则$y=5250$；晚场$x=170$，则$y=8500$.

问题（3）中，通过试验可以看出：每当重物质量m取定一个值时，

弹簧长度 l 就随之确定一个值. 如果弹簧原长 10cm，每 1kg 重物使弹簧伸长 0.5cm，那么当 $m=1$ 时，$l=10.5$，当 $m=10$ 时，l 等于多少?

问题（4）中，你容易算出：当 $S=10\text{cm}^2$ 时，$r=$______ cm；当 $S=20\text{cm}^2$，$r=$______ cm. 每当 S 取定一个值时，r 随之确定一个值. 你能得出：两者的关系为 $r=$________.

议一议

上面每个问题中的两个变量互相联系，当其中一个变量取定一个值时，另一个变量就________.

在一些用图或表格表达的问题中，也能看到两个变量间上面那样的关系.

想一想

（1）图 3－1 是某人体检时的心电图，其中图上点的横坐标 x 表示时间，纵坐标 y 表示心脏部位的生物电流，它们是两个变量. 在心电图中，对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的对应值吗?

图 3－1

（2）下面的某市 2008 年 8 月 16 日至 8 月 25 日的最高气温统计表中，日期与最高气温可以记做两个变量 x 与 y，对于表中每一个确定的日期（x），都对应着一个确定的最高气温（y）吗?

日期（x）	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
最高气温（y/℃）	29	29	28	30	25	28	29	28	29	30

一般地，在一个变化过程中有两个变量 x 与 y，如果对于 x 的每一个值，y 都有唯一确定的值与它对应，那么就说 y 是 x 的**函数**，x 叫做**自变量**.

继续研究上面几个问题，还可以发现两个重要的事实：

（1）在每个例子中都指出了自变量的取值集合；

（2）都给出了对应法则. 对自变量的一个值，只有唯一的一个函数值与之对应. 对应法则可以通过公式、数表或图像给出.

可见，函数关系实质上是表现两个数集的元素之间按照某种法则确定的一种对应关系．下面我们用集合语言，从对应的角度对函数概念作进一步描述．

设 A，B 是非空的数集，如果按某个确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应，那么就称 f 为从集合 A 到集合 B 的一个**函数**，记做

$$y=f(x),\ x\in A.$$

其中，x 叫做**自变量**，x 的取值范围 A 叫做函数的**定义域**；与 x 的值相应的 y 的值叫做**函数值**，函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫做函数的**值域**．

值得注意的是，形如 $y=1$（$x\in\mathbf{R}$）也是函数，因为对于实数集 $\mathbf{R}$ 中的任何一个数 x，按照对应法则“函数值总是1”，在 $\mathbf{R}$ 中 y 都有唯一确定的值 1 与它对应，所以 y 是 x 的函数．

例1 求下列函数的定义域：

（1）$f(x)=\dfrac{1}{x-3}$；

（2）$f(x)=\sqrt{x-2}$；

（3）$f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}$．

工具箱

在分式中，分母不能为零，否则分式没有意义；在 $\sqrt{a}$ 中，要求 $a\geqslant 0$.

分析：（1）要使 $\dfrac{1}{x-3}$ 有意义，必须使分母 $x-3\neq 0$，即 $x\neq 3$；

（2）要使 $\sqrt{x-2}$ 有意义，必须使被开方式 $x-2\geqslant 0$，即 $x\geqslant 2$；

（3）要使 $\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}$ 有意义，必须使 $x\geqslant 2$ 与 $x\neq 3$ 同时成立．

解：（1）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ 的定义域是 $\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq 3\}$；

（2）函数 $f(x)=\sqrt{x-2}$ 的定义域是 $\{x\mid x\geqslant 2\}$；

（3）函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}$ 的定义域是 $\{x\mid x\geqslant 2$ 且 $x\neq 3\}$．

可以看出，在用数学式子表示的函数中，函数的定义域就是使这个式子有意义的 x 的取值范围．

练一练

求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$； (2) $f(x)=\sqrt{x+2}$； (3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$．

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 在定义域内取一个确定的值 a 时，其对应的函数值，我们记做 $f(a)$.

例如，函数 $f(x)=2x+1$，在 $x=3$，$x=-5$ 时的函数值分别为 $f(3)=7$，$f(-5)=-9$.

议一议 $f(x)$ 与 $f(a)$（a 是常数）有什么区别和联系？

例2 求函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{2x-1}$，在 $x=-1$，0，1 时的值.

解： $f(-1)=\dfrac{-1+2}{2\times(-1)-1}=-\dfrac{1}{3}$；

$f(0)=\dfrac{0+2}{2\times0-1}=-2$；

$f(1)=\dfrac{1+2}{2\times1-1}=3$.

从上例知道，如果 $f(x)$ 是一个代数式，要求 $x=a$ 时的函数值 $f(a)$，只要把 a 代入式子进行计算就可以了，其方法与以前学过的求代数式的值是一致的.

工具箱

用运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子，叫做代数式. 例如，$\dfrac{1}{3}(a^2+ab)$，$x^2+\sqrt{y}$. 单独的一个数或者一个字母，像 -3，a 也是代数式.

用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果叫做代数式的值.

例3 已知函数 $f(x)=4x+1$，$x\in\{0, 1, 2, 3, 4\}$，求这个函数的值域.

解： $\because f(0)=4\times0+1=1$,

$f(1)=4\times1+1=5$,

$f(2)=4\times2+1=9$,

$f(3)=4\times3+1=13$,

$f(4)=4\times4+1=17$,

$\therefore$ 函数 $f(x)=4x+1$ 的值域是 $\{1, 5, 9, 13, 17\}$.

练习

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\frac{1}{4x-3}$；　(2) $f(x)=\sqrt{4x-3}$；　(3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4x-3}}$；

(4) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{4x-3}$；　(5) $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}+2$.

2. 已知 $f(x)=2x^2-3x-4$，请填下表：

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	a	$-a$
$f(x)$						

3. 已知 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$，$x\in\{0, 1, 3, 5\}$，求这个函数的值域.

习题 一

1. 讨论圆的周长 l 与半径 r 之间的关系.
   (1) 写出该问题中的常量和变量；
   (2) 判断变量之间是否存在依赖关系，若存在，试用表达式表示；
   (3) 设半径 r 为自变量，写出函数的定义域及值域；
   (4) 当圆的半径为 3cm 时，求圆的周长.
2. 已知 $f(x)=\frac{1-2x}{2}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(a)$.
3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{2}{3x+5}$；　(2) $y=\sqrt{3x+5}$；　(3) $y=\sqrt{x^2-2x-3}$；

(4) $y=\sqrt{3x+4-x^2}$；　(5) $y=\frac{\sqrt{1-x}}{x}$；　(6) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$.

4. 已知 $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}+1}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(4)$.
5. 求下列函数的值域：
   (1) $f(x)=\sqrt{x}-1$，$x\in\{0, 1, 4, 9\}$；
   (2) $f(x)=x+1$，$x\in[0, 3]$；
   (3) $f(x)=-x^2+1$.
6. 设函数 $f(x)=x^2+2x+3$，在下表的第二行内填写相应的函数值：

x	…	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…							…

3.2 函数的表示法

我们在初中已经接触过函数的三种表示法：解析法、列表法和图像法.

1. 解析法

把两个变量之间的函数关系用一个等式来表示，这种表示函数的方法叫做**解析法**.

这个等式叫做函数的解析表达式，简称**解析式**.

例如，我们在初中学过的正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数的解析式分别为

$$f(x)=kx \quad (k\neq 0);$$

$$f(x)=\frac{k}{x} \quad (k\neq 0);$$

$$f(x)=kx+b \quad (k\neq 0);$$

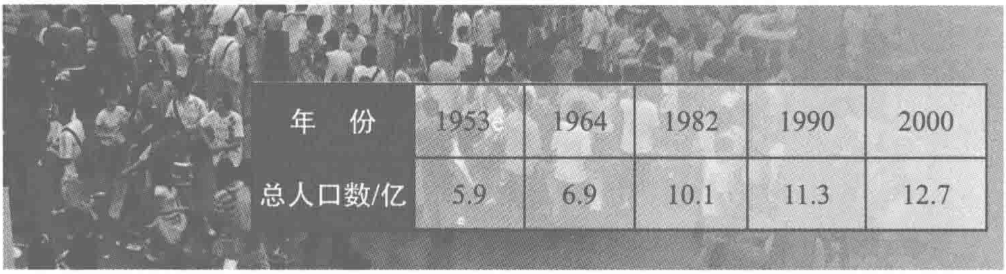
$$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0).$$

这种方法能够简明准确地反映出事物变化过程中，两个变量之间的数量关系.

2. 列表法

通过列出自变量与对应函数值的表格来表示函数关系的方法叫做**列表法**.

例如，新中国成立后共进行了五次人口普查，各次普查得到的人口数据如下表所示. 这张表清楚地表示了年份与当年普查总人口（单位：亿）的函数关系. 从这张表，我们可以从年份查出当年普查的人口总数.



年　份	1953	1964	1982	1990	2000
总人口数/亿	5.9	6.9	10.1	11.3	12.7

从这张表中，我们能清楚地看出这个函数的定义域和值域：

定义域：$\{1953, 1964, 1982, 1990, 2000\}$；

值　域：$\{5.9, 6.9, 10.1, 11.3, 12.7\}$.

3. 图像法

把自变量 x 的一个值和函数 y 的对应值分别作为点的横坐标和纵坐标，可以在直角坐标系中描出一个点，所有这些点的集合，叫做这个函数的图像．用图像来表示两个变量之间的函数关系的方法叫做**图像法**．

例如，我们在初中学过的

一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的图像是一条直线；

反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq0$）的图像是双曲线；

二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图像是抛物线．

又如图 3－2，是我国人口出生率变化曲线，也是用图像法表示函数关系的．

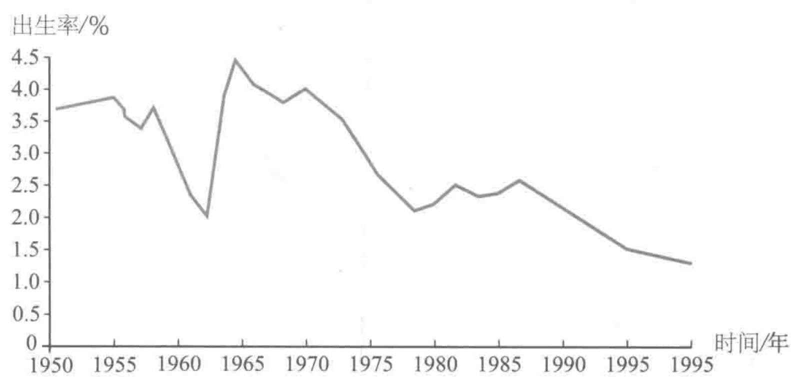


图 3－2

议一议 比较函数的三种表示法，它们各自有什么特点？

例1 某种笔记本的单价是 5 元，买 x（$x\in\{1,2,3,4,5\}$）个笔记本需要 y 元，试用函数的三种表示法表示函数 $y=f(x)$．

解： 这个函数的定义域是数集 $\{1,2,3,4,5\}$．

用解析法可将函数 $y=f(x)$ 表示为

$$y=5x,\ x\in\{1,2,3,4,5\}.$$

用列表法可将函数 $y=f(x)$ 表示为

笔记本个数 x	1	2	3	4	5
钱数 y	5	10	15	20	25

用图像法可将函数 $y=f(x)$ 表示为图 3－3.

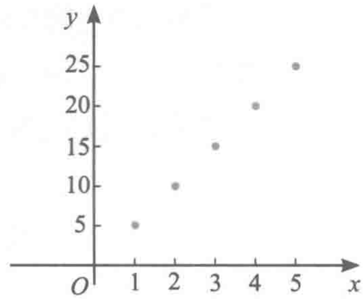


图 3－3

函数图像既可以是连续的曲线，也可以是直线、折线、离散的点等等.

例2 画出函数 $y=|x|$ 的图像.

解：由绝对值的概念，我们有

$$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

所以，函数 $y=|x|$ 的图像如图 3－4 所示.

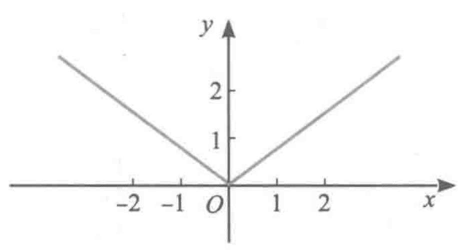


图 3－4

工具箱

一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零. 即

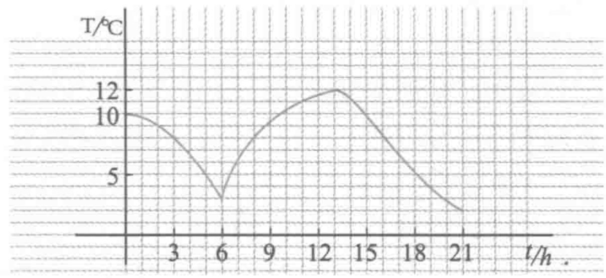
$$|a|=\begin{cases}a & (a>0),\\ a & (a=0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

从数轴上看，一个数的绝对值就是表示这个数的点离开原点的距离.

练习

1. 收集一些可以用列表法表示的函数.

2. 下图是用温度自动记录仪描绘的某天温度随时间变化的图像，它形象地给出了温度 T 随时间变化的函数关系.



（第 2 题）

（1）指出上午 8 点整时的气温；

（2）指出全天的最高气温和最低气温；

（3）描述全天的气温随时间增高和降低的情况.

3. （1）某商店有计算器 120 台，每台售价 50 元，求售出台数 x 与收款总数 y（元）之间的函数关系式；

（2）A，B 两地相距 100 千米，某人以每小时 5 千米的速度步行，从 A 地向 B 地行走，求行走时间 x（小时）和人与 B 地的距离 y（千米）之间的函数关系式；

（3）长方形面积为 60 米^2，写出它的长 x（长不大于 10 米）与宽 y（米）之间的函数关系式.

4. 画出下列函数的图像，并求它们的值域：

（1）$f(x)=2x$，$x\in\{-2, -1, 0, 1, 2\}$；

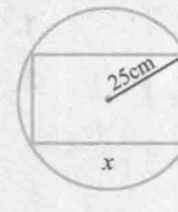
（2）$f(x)=-2x+1$，$x\in[1, +\infty)$；

（3）$f(x)=\dfrac{4}{x}$，$x\in(0, +\infty)$；

*（4）$f(x)=2|x|+1$，$x\in\mathbf{Z}$，且 $|x|\leqslant 2$.

习题 二

1. 如图，把截面半径为25cm的圆形木头锯成矩形木料，如果矩形的一边长为 x cm，面积为 y cm^2，把 y 表示为 x 的函数．



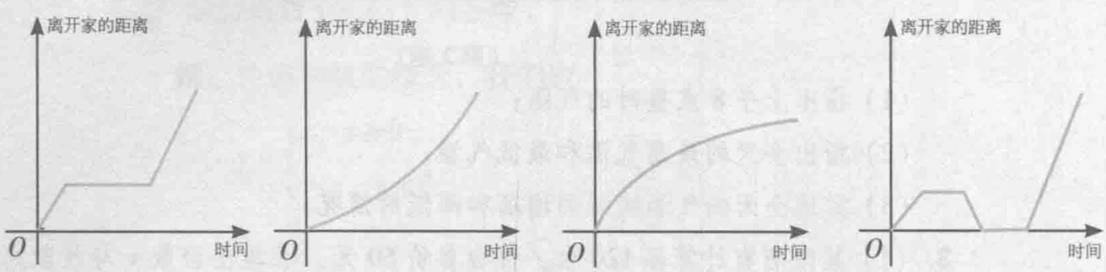
（第1题）

2. 下图中哪几个图像与下述三件事分别吻合得最好？请你为剩下的那个图像写出与之吻合的一件事．

(1) 我离开家不久，发现自己把作业本忘在家里了，于是返回家里找到了作业本再上学；

(2) 我骑着车一路匀速行驶，只是在途中遇到了一次交通堵塞，耽搁了一些时间；

(3) 我出发后，心情轻松，缓缓行进，后来为了赶时间开始加速．



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

（第2题）

3. 北京市某路公共汽车共设13站，乘车的收费标准为：乘坐7站以内（含7站），收费1元；乘坐7站以上，收费2元．试用列表法表示这个函数．

4. 闰年的一年中，月份构成的集合为 A，每月天数构成的集合为 B，f 为月份与每月的天数的对应法则．求 $f(1)$，$f(2)$，$f(7)$，$f(8)$，$f(12)$．

5. 在同一坐标系中分别作下列各组中函数的图像：

(1) $y=2x^2$，$y=x^2$，$y=\frac{1}{2}x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$；

(2) $y=x^2$，$y=(x+1)^2$，$y=(x-1)^2$．

用计算机绘制函数图像

利用计算机软件可以便捷、迅速地绘制各种函数图像. 不同的计算机软件绘制函数图像的具体操作不尽相同，但都是基于我们熟悉的描点作图，即给自变量赋值，用计算法则算出相应的函数值，再由这些对应值生成一系列的点，最后连接这些点描绘出函数图像.

下面介绍用《几何画板》绘制函数 $y=bx^2$ ($b\neq0$) 的图像.

(1) 打开几何画板，通过执行“构造/平行线”和“构造/线段”，生成平行于 x 轴的线段 AB，将 A 固定于 y 轴，B 为动点. 选中 B 点，执行“度量/横坐标”选项，画板上显示的点 B 的横坐标 x_B 就是参数 b 的值.

(2) 执行“图表/新建函数”，在对话框内输入函数表达式“$x_B*x\wedge2$”，执行“图表/绘制新函数”，即生成函数图像，如图 3－5.

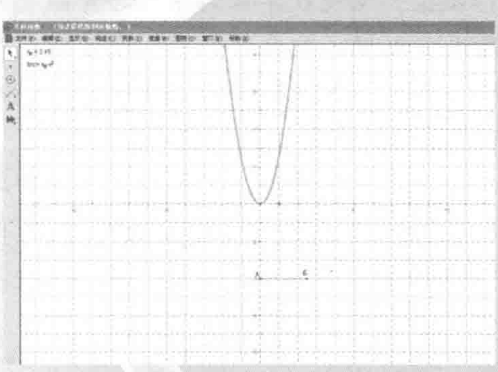


图 3－5

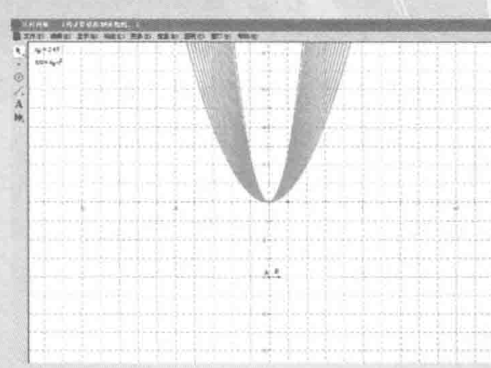


图 3－6

当你左右移动 B 点的位置时，函数 $y=bx^2$ ($b\neq0$) 就会“动”起来，如图3－6.

阅读空间

函数概念的发展

——从解析式到对应关系

函数概念早在18世纪初就被提出，但是在很长一段时间内，由于人们接触到的函数都是以解析式的形式出现，以至于人们认为函数一定能用解析式表示，甚至认为函数就是解析式. 欧拉就曾定义函数为“包括变量和一些常数的任何表达式”.

在函数概念的发展过程中，德国数学家狄利克雷(Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 1805. 2. 13－1859. 5. 5)功不可没. 19世纪，狄利克雷定义了一个“奇怪的函数”

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

这个函数后来被称为狄利克雷函数. 很明显，它既不能用列表法，也不能用图像法，又不能只用一个解析式表示，但是它完全满足函数的思想.

狄利克雷函数以及与之相关的变形函数，促使数学家们深入思考函数的本质和概念表达，在函数理论建立和应用中发挥了重要的作用. 通过这些特殊的函数，人们渐渐地形成了目前这种以对应关系为核心的函数观，在此基础上发展出函数的多种表示方法，如：列表法、图像法.

实际上，在日常生活和实际工作中，存在着许多不能用解析式表示的函数，比如：股票的价格 (y) 是关于时间 (x) 的函数. 但这并不妨碍我们把它作为一个函数来理解并用 $y=f(x)$ 来表示这种关系.

3.3 函数的单调性

想一想

图 3－7 为某地区 2008 年元旦这一天 24 小时内的气温变化图，从这张气温变化图，你能看出气温在哪些时间段内是逐步升高的，在哪些时间段内又是逐步下降的吗？

学习小贴示

中国最早称农历正月初一为“元旦”，意为“初始的日子”．中华人民共和国成立后才将公历的 1 月 1 日正式定为“元旦”．

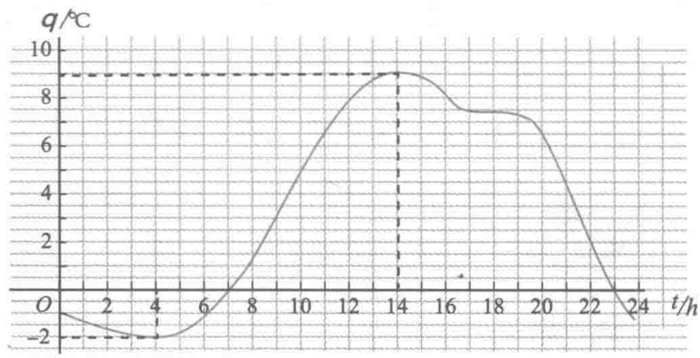


图 3－7

在研究函数的过程中，经常要考虑函数值的增减变化．

在一次函数中，我们看到 $f(x)=2x$ 的图像（如图 3－8（1））是从左向右逐渐上升；$f(x)=-2x$ 的图像（如图 3－8（2））是从左向右逐渐下降．二次函数 $f(x)=x^2$ 的图像（如图 3－8（3））在整个定义域内有时上升，有时下降．如果将它的定义域分为两个区间 $(-\infty,0)$ 和 $[0,+\infty)$，那么在区间 $(-\infty,0)$ 上，函数图像逐渐下降，在区间 $[0,+\infty)$ 上，函数图像逐渐呈上升趋势．

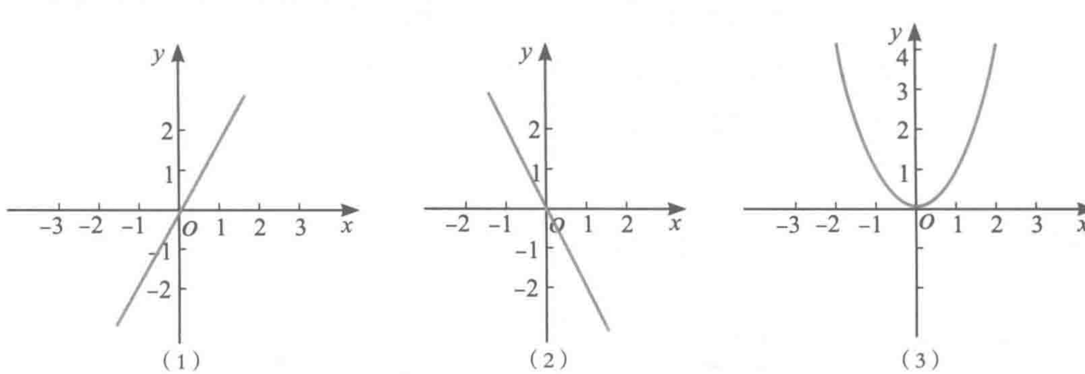


图 3－8

想一想 如何描述函数图像的“上升”“下降”呢？

以二次函数$f(x)=x^2$为例，列出x，y的对应值表.

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$f(x)=x^2$	…	16	9	4	1	0	1	4	9	16	…

对比图3-8（3）和上表，可以发现：

图像在y轴左侧“下降”，也就是，在区间$(-\infty,0)$上，随着x的增大，相应的函数值$f(x)$反而减小；图像在y轴右侧“上升”，也就是，在区间$[0,+\infty)$上，随着x的增大，相应的函数值$f(x)$也在增大.

议一议

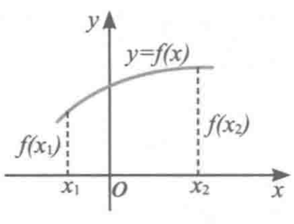
如何利用函数解析式$f(x)=x^2$描述“随着x的增大，相应的函数值$f(x)$减小”“随着x的增大，相应的函数值$f(x)$也增大”？

对于二次函数$f(x)=x^2$，“在区间$[0,+\infty)$上，当x增大，相应的函数值$f(x)$也随着增大”我们可以这样描述：在区间$[0,+\infty)$上任取两个x_1，x_2，得到$f(x_1)=x_1^2$，$f(x_2)=x_2^2$，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$.这时，我们就说函数$f(x)=x^2$在区间$[0,+\infty)$上是增函数.

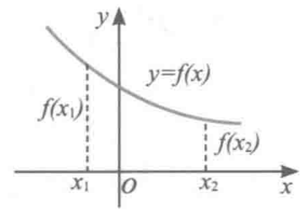
一般地，对于给定区间上的函数$f(x)$：

1. 如果对于这个区间上的任意两个x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，那么就说$f(x)$在这个区间上是**增函数**（或单调递增函数），如图3-9(1)所示.

2. 如果对于这个区间上的任意两个x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，那么就说$f(x)$在这个区间上是**减函数**（或单调递减函数），如图3-9(2)所示.



（1）



（2）

图3-9

函数$y=f(x)$在某个区间上单调递增或单调递减的性质，叫做$f(x)$在

这个区间上的**单调性**．这个区间叫做$f(x)$的**单调区间**．

例如，函数$y=2x$在区间（$-\infty$，$+\infty$）上是增函数；$y=-2x$在区间（$-\infty$，$+\infty$）上是减函数．

想一想

正比例函数$y=kx$在区间（$-\infty$，$+\infty$）内是增函数还是减函数？为什么？

要判断一个函数在某个区间上的单调性，我们可以利用函数的图像直观地判断，也可以根据函数单调性的定义加以判断．

例1 图3－10是函数$y=f(x)$的图像，定义域是$[-4,5]$．试根据图像找出函数的单调区间并指明在每个单调区间上函数的单调性．

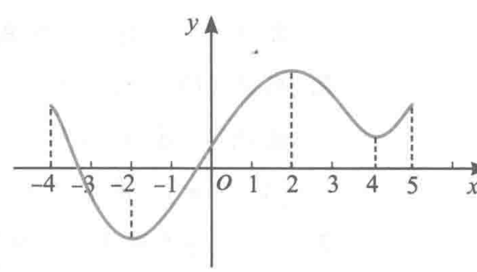


图3－10

解：函数$f(x)$的单调区间是$[-4,-2)$，$[-2,2)$，$[2,4)$，$[4,5)$；而且在区间$[-4,-2)$，$[2,4)$上$f(x)$分别是减函数，在区间$[-2,2)$，$[4,5)$上$f(x)$分别是增函数．

练一练

画出下列函数的图像，根据图像说出它们的单调区间：

（1）$y=-x^2$；　　（2）$y=x^2+2$.

例2 证明函数$f(x)=2x+1$在（$-\infty$，$+\infty$）上是增函数，如图3－11.

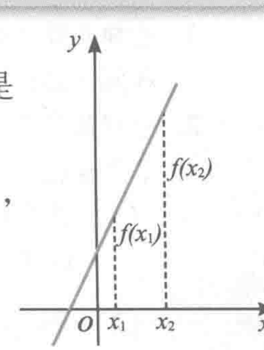


图3－11

证明：设x_1，$x_2\in(-\infty,+\infty)$，且$x_1<x_2$，那么

$$f(x_1)=2x_1+1,$$

$$f(x_2)=2x_2+1,$$

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=(2x_1+1)-(2x_2+1)\\&=2(x_1-x_2).\end{aligned}$$

$\because x_1<x_2$，$\therefore x_1-x_2<0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)=2(x_1-x_2)<0$，

即 $f(x_1) < f(x_2)$,

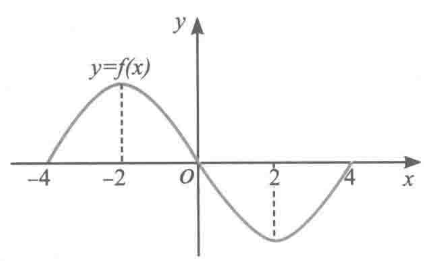
$\therefore f(x) = 2x + 1$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

议一议

你能判断出函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 内是增函数还是减函数吗?

练习

1. 如图，已知函数 $y = f(x)$ 的图像，试根据图像找出函数单调区间并指出在每个区间上的函数增减性.



（第 1 题）

2. 根据 (1) $a > 0$, (2) $a < 0$ 的情况，作图说明函数 $f(x) = ax^2$ 在 $(-\infty, 0)$, $[0, +\infty)$ 上的增减性.

3. 作下列函数图像，并指出它们的单调区间:

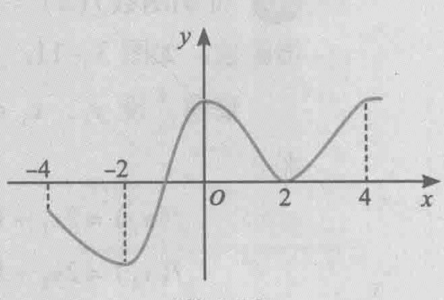
(1) $y = \dfrac{3}{2}x$;　(2) $y = -\dfrac{3}{2}x$;

(3) $y = \dfrac{1}{2}x^2$;　(4) $y = \dfrac{2}{x}$.

4. 证明函数 $y = -x - 3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是减函数.

习题 三

1. 已知函数 $y = f(x)$ 的图像，根据图像找出函数的单调区间以及在每个单调区间上函数的增减性.



（第 1 题）

2. 分别画出下列函数的图像，并判定它们的单调性:

(1) 函数 $f(x) = -3x + 2$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(2) 函数 $f(x) = -\dfrac{2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$;

(3) 函数 $f(x) = x^2 + 1$, $x \in (-\infty, 0)$.

3. (1) 函数 $y=-x^2$ 在 $[0, 4]$ 上的单调性为__________；

(2) 函数 $y=-x^2$ 在 $[-4, 0)$ 上的单调性为__________；

(3) 能说 $y=-x^2$ 在 $[-4, 4]$ 上是增函数吗？为什么？

(4) 求函数 $y=-x^2$ 在 $[-5, 5]$ 上的单调区间．

***4.** 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，且实数 a，b 满足 $a+b>0$，试比较 $f(a)$ 与 $f(-b)$，$f(-a)$ 与 $f(b)$ 的大小．

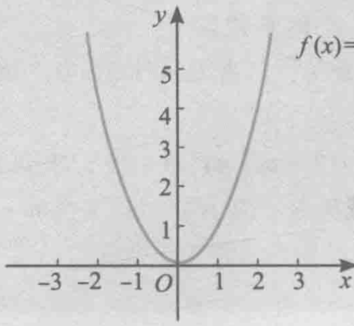
***5.** (1) 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，且 $f(1-m)<f(m-3)$，求 m 的取值范围；

(2) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数，且 $f(1-m)<f(m-3)$，求 m 的取值范围．

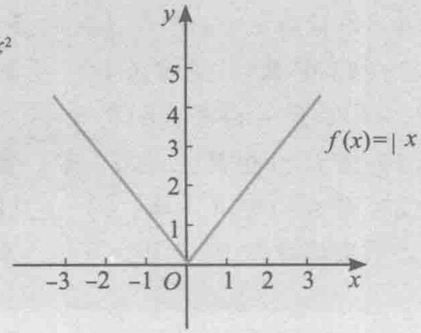
3.4 函数的奇偶性

想一想

观察函数$f(x)=x^2$和$f(x)=|x|$的图像（图3-12），你能发现这两个函数图像有什么共同特征吗？



(1)



(2)

图3-12

工具箱

如果函数图像上的任意一个点P关于y轴的对称点P'仍然在函数图像上，那么函数图像关于y轴对称．y轴叫做这个函数图像的对称轴．

我们看到，这两个函数的图像都关于y轴对称．

如何利用函数解析式描述函数图像的这个特征呢？

对于函数$f(x)=x^2$，有：

$f(-3)=9=f(3)$；

$f(-2)=4=f(2)$；

$f(-1)=1=f(1)$．

进一步，对于**R**内任意的一个x，都有$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$．

对于函数$f(x)=|x|$，有：

$f(-3)=$____$=$____；

____$=$____$=f(2)$；

____$=1=$____．

进一步，对于**R**内任意的一个x，都有________________．

一般地，如果对于函数$f(x)$的定义域内任意一个x，都有

$$f(-x)=f(x),$$

那么函数$f(x)$就叫做**偶函数**．

想一想

观察函数 $f(x)=x$ 和 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的图像（图 3-13），你能发现这两个函数图像有什么共同特征吗？

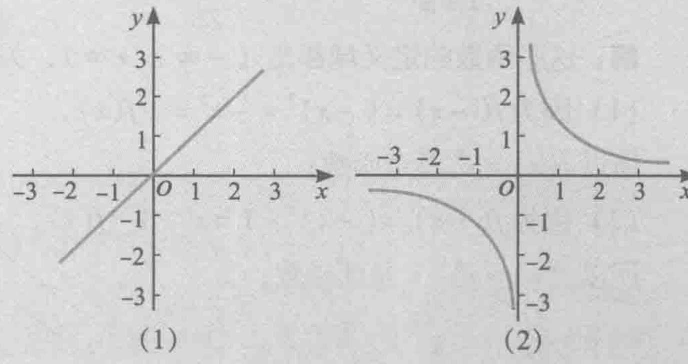


图 3-13

工具箱

如果函数图像上的任意一点 P 关于原点的对称点 P' 仍然在函数图像上，那么函数图像关于坐标原点对称. 原点 O 叫做这个函数图像的对称中心.

我们看到，这两个函数图像都关于原点对称. 函数图像的这个特征，反映在函数解析式上就是：

当自变量 x 取得一对相反数时，相应的函数值 $f(x)$ 也是一对相反数.

例如，对于函数 $f(x)=x$，有：

$$f(-3)=-3=-f(3);$$
$$f(-2)=-2=-f(2);$$
$$f(-1)=-1=-f(1).$$

进一步，对于函数 $f(x)=x$ 定义域 $\mathbf{R}$ 内任意一个 x，都有 $f(-x)=-x=-f(x)$.

又如，对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，有：

$f(-3)=$ ________ $=$ ________；

________ $=$ ________ $=-f(2)$；

________ $=-1=$ ________.

进一步，对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 定义域 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 内任意一个 x，都有 ____________________.

一般地，如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

那么 $f(x)$ 就叫做**奇函数**.

例1 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x^3$；　　（2）$f(x)=x^4-1$；

（3）$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$；　　（4）$f(x)=x+2$.

解：这些函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，关于原点对称．

（1）因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，

所以 $f(x)=x^3$ 是奇函数；

（2）因为 $f(-x)=(-x)^4-1=x^4-1=f(x)$，

所以 $f(x)=x^4-1$ 是偶函数；

（3）因为 $f(-x)=\dfrac{(-x)}{1+(-x)^2}=-\dfrac{x}{1+x^2}=-f(x)$，

所以 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 是奇函数；

（4）因为 $f(x)=x+2$，$f(-x)=-x+2$，

当 $x\neq0$ 时，$f(-x)\neq f(x)$，且 $f(-x)\neq-f(x)$，所以 $f(x)=x+2$ 既不是偶函数，也不是奇函数．

注意：在奇函数与偶函数的定义中，都要求函数的定义域对应的区间关于坐标原点对称．如果一个函数的定义域对应的区间关于坐标原点不对称，这就失去了讨论函数是奇函数或是偶函数的前提条件，函数也就无奇偶性可言．

想一想

是否存在既是奇函数又是偶函数的函数？若存在，举例说明．

例2 判定函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的奇偶性和增减性．

解：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的定义域是 $x\neq0$ 的实数，即 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称．

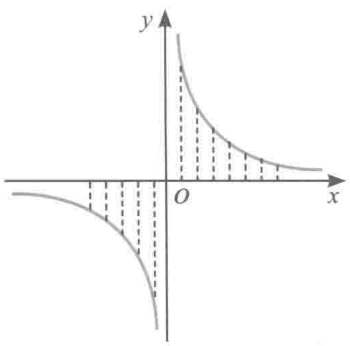


图 3－14

因为 $f(-x)=-\dfrac{1}{x}=-f(x)$，

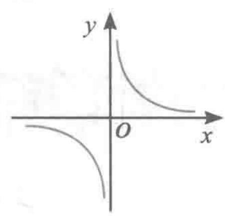
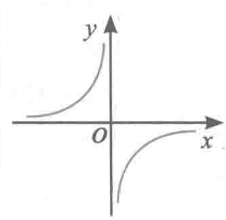
所以函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 是奇函数．

如图 3－14，画出$f(x)=\dfrac{1}{x}$的图像.

观察图像知，$f(x)=\dfrac{1}{x}$在（$-\infty$，0）上是减函数，在（0，$+\infty$）上也是减函数.

工具箱

反比例函数的性质如下表所示：

$y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq0$）	定义域	值　域	图　　像	单调性	奇偶性
$k>0$	$x\neq0$	$y\neq0$		$x\in(-\infty,0)\cup x\in(0,+\infty)$ 上分别是减函数	奇函数
$k<0$	$x\neq0$	$y\neq0$		$x\in(-\infty,0)\cup x\in(0,+\infty)$ 上分别是增函数	奇函数

议一议　如何利用函数的奇偶性，简便地作出函数的图像.

练习

1. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x^{-2}$；　　（2）$f(x)=2x+x^3$；

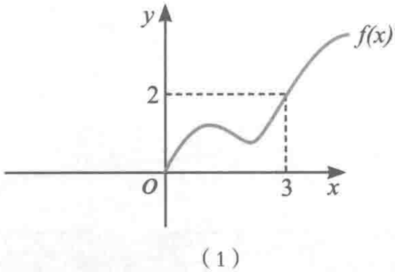
（3）$f(x)=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$；　　（4）$f(x)=\dfrac{5}{x}-x$；

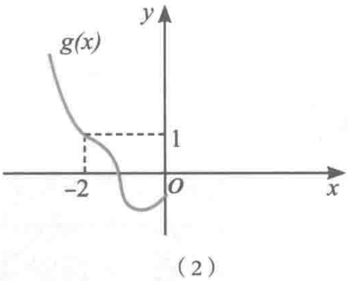
（5）$f(x)=\sqrt[3]{x}$；　　（6）$f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

2. (1) 已知 $y=f(x)$ 是偶函数，且 $f(3)=9$，求 $f(-3)$ 的值；

(2) 已知 $y=f(x)$ 是奇函数，且 $f(-4)=5$，求 $f(4)$ 的值.

3. 如图，给出了奇函数 $f(x)$ 和偶函数 $g(x)$ 的部分图像，根据图像求 $f(-3)$，$g(2)$ 的值.





(第 3 题)

习题 四

1. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=3x$；　　(2) $f(x)=-3x+2$；

(3) $f(x)=3-x^2$；　　(4) $f(x)=9-6x+x^2$；

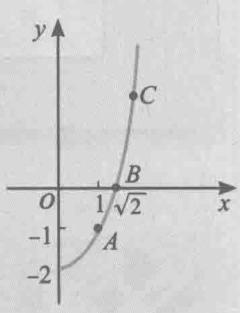
(5) $f(x)=x+x^{-3}$；　　(6) $f(x)=x^4+x^{-2}$.

2. 判断下列函数是否是偶函数：

(1) $f(x)=-x^2$；　　(2) $f(x)=(x+1)(x-1)$；

(3) $f(x)=x^2+x$；　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

3. 已知函数 $f(x)=x^2-2$，试讨论它的奇偶性. 若图像的右半部分如图所示，请画出它的左半部分，并说明理由.



(第 3 题)

*4. 已知 $y=f(x)$ 是偶函数，且 $x>0$ 时，$y=f(x)$ 是增函数. 试比较下列函数值的大小：

(1) $f(-2)$ 与 $f(2)$；

(2) $f(-1)$ 与 $f(3)$；

(3) $f(-3)$ 与 $f(2.5)$.

5. (1) 判断 $y=2x$ 与 $y=2x+3$ 的奇偶性；

*(2) 函数 $y=2x+b$，b 为何值时是奇函数；

*(3) 讨论函数 $y=2x+b$ 的奇偶性.

3.5 函数的实际应用举例

在实际生活以及生产和科学研究中，经常会遇到一些一次函数和二次函数的实例. 如果我们观察实例中的一些量之间的关系，找出它们之间的函数表达式，便可进一步深入研究这些函数的性质，解决一些实际问题.

例1 某地长途汽车客运公司规定旅客可随身携带一定重量的行李，如果超过规定，则需要购买行李票，行李票的费用 y（元）是行李质量 x（千克）的一次函数，其图像如图 3－15 所示，求：

(1) y 与 x 之间的函数解析式；

(2) 旅客最多可以免费携带行李的质量.

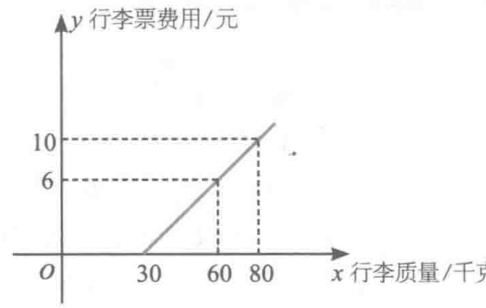


图 3－15

分析：观察所绘图像，可知当 $x=60$ 时，$y=6$；当 $x=80$ 时，$y=10$. 可用待定系数法求函数表达式. 当 $y=0$ 时的自变量的值，就是旅客最多可免费携带行李的质量.

解：(1) 设一次函数表达式是 $y=kx+b$.

$\because$ 当 $x=60$ 时，$y=6$；当 $x=80$ 时，$y=10$，

$$\therefore \begin{cases} 6=60k+b, \\ 10=80k+b. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=\dfrac{1}{5}, \\ b=-6. \end{cases}$$

$\therefore$ 所求函数表达式是 $y=\dfrac{1}{5}x-6$（$x\geqslant 30$）.

(2) 当 $y=0$ 时，$\dfrac{1}{5}x-6=0$，

$\therefore$ $x=30$.

答：旅客最多可免费携带 30 千克行李.

例2 某工厂生产某产品的固定成本为 2000 元，每生产一件产品，成本增加 5 元.

(1) 试求此产品的成本函数；

（2）试求产量 $Q=100$ 件和 $Q=200$ 件时的成本．

学习小贴示

企业为生产产品和销售产品所支出的费用总和叫做成本．成本通常由两部分组成：不受产量变化影响的成本，叫做固定成本，如厂房设备等；随产量变化而变化的成本，叫做可变成本．

通常用字母 Q 表示产量，用字母 C 表示成本，用字母 C_0 表示固定成本，用字母 C_1 表示可变成本．显然，可变成本 C_1 是产量 Q 的函数，记做 $C_1(Q)$，所以成本 C 也是产量 Q 的函数，记做 $C(Q)$，满足 $C(Q)=C_0+C_1(Q)$，函数 $C(Q)$ 叫做成本函数．

解：（1）因为每生产 1 件产品，成本增加 5 元，所以生产 Q 件产品的可变成本为 $C_1(Q)=5Q$.

又因为 $C_0=2000$ 元，所以

$$C(Q)=C_0+C_1(Q)=2000+5Q\ (Q\in\mathbf{N}_+).$$

（2）$C(100)=2000+5\times100=2500.$

$C(200)=2000+5\times200=3000.$

答：（1）此产品的成本函数为 $C(Q)=2000+5Q(Q\in\mathbf{N}_+)$.

（2）产量为 100 件时的成本为 2500 元，产量为 200 件时的成本为 3000 元．

例3 某商品的价格为 40 元时，月销售量为 10000 件，价格每提高 2 元，月销售量就会减少 400 件，在不考虑其他因素时，

（1）试求这种商品的月销售量与价格之间的函数关系；

（2）当价格提高到多少元时，这种商品就会卖不出去？

解：（1）设商品价格提高 n 个 2 元时，则商品价格 $x=40+2n$，销售量 $y=10000-400n$.

$$\therefore\quad y=10000-400\times\frac{x-40}{2}$$

$$=10000-200x+8000.$$

$$=18000-200x.$$

（2）商品卖不出去时，销售量 $y=0$.

$\therefore\quad 18000-200x=0.$

$x=90.$

答：（1）这种商品销售量与价格函数表达式为 $y=18000-200x$，$x\in[40,90]$．

（2）当价格提高到 90 元时，这种商品就会卖不出去．

练一练

某商品 5 千克的价格是 20 元.

(1) 写出商品价格与重量之间的函数关系式;

(2) 买 7 千克该商品应付多少元?

例4 某工厂生产一种产品的总利润 L（元）是产量 x（件）的二次函数

$$L=-x^2+2000x-10000,\ 0<x<1900.$$

试问：产量是多少时总利润最大？最大利润是多少？

解：由于 $a=-1<0$，因此上述二次函数在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上有最大值. 将函数的表达式配方得

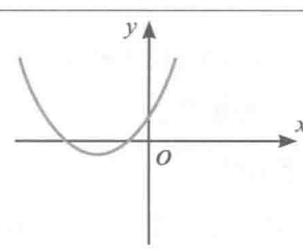
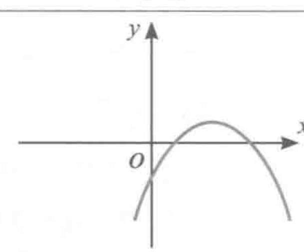
$$\begin{aligned}L&=-(x^2-2000x+1000^2-1000^2)-10000\\&=-(x-1000)^2+990000.\end{aligned}$$

由此得出，当 $x=1000$ 时，L 达到最大值 990000.

答：当产量为 1000 件时，总利润最大，最大利润为 99 万元.

工具箱

二次函数的图像与性质

定义	函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ 叫做二次函数	
图像	$a>0$	$a<0$
		
	开口向上的抛物线	开口向下的抛物线
	顶点坐标 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$	
性质	在 $x\in\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)$ 上是减函数；在 $x\in\left[-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$ 上是增函数	在 $x\in\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)$ 上是增函数；在 $x\in\left[-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$ 上是减函数
	当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最小值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最大值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

例5 某市电力公司为了鼓励居民用电，采用分段计费的方法计算电费：每月用电不超过 100 度时，按每度 0.57 元计费；每月用电超过 100 度时，其中的 100 度仍按原标准收费，超过部分按每度 0.50 元计费.

（1）设月用电 x 度时，应交电费 y 元，当 $x\leqslant 100$ 和 $x>100$ 时，分别写出 y 关于 x 的函数关系式；

（2）小王家第一季度交纳电费情况如下：

月　份	一月份	二月份	三月份	合　计
交费金额	76 元	63 元	45 元 6 角	184 元 6 角

问小王家第一季度共用电多少度？

分析：首先根据题意写出 y 关于 x 的分段函数关系式，再根据题中表格提供的信息，寻找相应的函数关系式，求出一、二、三月份的用电度数.

解：（1）$y=\begin{cases}0.57x,\ (0<x\leqslant 100),\\ 0.5(x-100)+57,\ (x>100),\end{cases}$

$=\begin{cases}0.57x,\ (0<x\leqslant 100),\\ 0.5x+7,\ (x>100).\end{cases}$

（2）当 $x=100$ 时，$y=0.57\times 100=57$，由于 76，63 均大于 57，可根据 $y=0.5x+7$ 知：

当 $y=76$ 时，$x=138$；当 $y=63$ 时，$x=112$.

同理根据 $y=0.57x$ 知：

当 $y=45.6$ 时，$x=80$.

故小王家第一季度共用电：$138+112+80=330$(度).

答：小王家第一季度共用电 330 度.

从这个例题可以看出，有些函数在它的定义域中，对于自变量 x 的不同取值范围，对应的法则也不同，这样的函数通常称为**分段函数**.

注意：分段函数是一个函数，而不是几个函数. 分段函数是由各段上的解析式用符号“ {”合并成的一个整体，定义域是各段自变量取值集合的并集，值域是各段函数值集合的并集.

生活中，有很多可以用分段函数描述的实际问题，如出租车的计费等等.

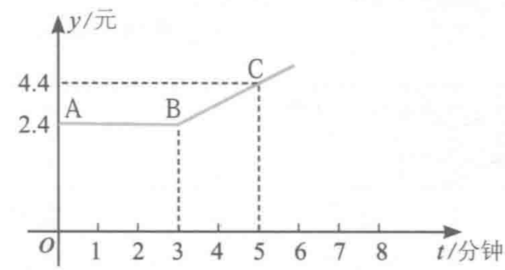
练习

1. 如图，折线 ABC 为甲地向乙地打长途电话所需付的电话费 y（元）与通话时间 t（分钟）之间的函数图像. 求：

（1）当 $t\geqslant 3$ 时，该函数的解析式；

（2）通话 2 分钟需付电话费多少元？

(3) 通话 7 分钟需付电话费多少元?



(第 1 题)

2. 某厂生产某种产品，每日可生产 100 件，每日的固定成本为 180 元，每件的可变成本为 12 元.

(1) 试求该厂生产这种产品的日总成本 C 与产量 Q 的函数关系;

(2) 试求 $Q=50$ 件与 $Q=100$ 件时的总成本.

3. 某地的出租车按如下方法收费：起步价 10 元，可行 3km（不含 3km）；3km 到 7km（不含 7km）按 1.6 元/km 计价（不足 1km，按 1km 计算）；7km 以后按 2.4 元/km 计价（不足 1km，按 1km 计算）. 试写出以行车里程为自变量，车费为函数值的函数解析式，并画出这个函数的图像.

习题 五

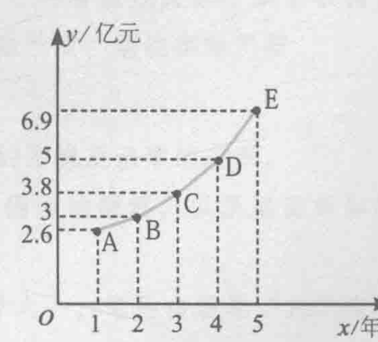
1. 建筑一个容积为 8000 米^3，深为 6 米的长方体蓄水池，池壁每平方米的造价为 a 元，池底每平方米的造价为 $2a$ 元，把总造价 y 表示为底的一边长 x 米的函数.

2. 如图表示近 5 年来某市的财政收入情况. 图中 x 轴上 1，2，…，5 依次表示第 1 年，第 2 年，…，第 5 年，即 2004 年，2005 年，…，2008 年，可以看出，图中的折线近似抛物线的一部分.

(1) 请你求出过 A，C，D 三点的二次函数的解析式;

(2) 分别求出当 $x=2$ 和 $x=5$ 时 (1) 中的二次函数的函数值，并分别与 B，E 两点的纵坐标相比较;

(3) 利用 (1) 中的二次函数的解析式预测 2010 年该市的财政收入.



(第 2 题)

3. 为了鼓励居民节约用水，某地区水费按下表规定收取：

每户每月用水量	不超过 10 吨（含 10 吨）	超过 10 吨的部分
水费单价	1.30 元/吨	2.00 元/吨

(1) 若某户用水量为 x 吨，需付水费为 y 元，则水费 y（元）与用水量 x（吨）之间的函数关系式是：

$$y=\begin{cases}\underline{\qquad\qquad\qquad} & (0\leqslant x\leqslant 10)\\ \underline{\qquad\qquad\qquad} & (x>10)\end{cases}$$

(2) 若小华家四月份付水费 17 元，则他家四月份用水多少吨？

*(3) 已知某住宅小区 100 户居民五月份交水费共 1682 元，且该月每户用水量均不超过 15 吨（含 15 吨），那么该月用水量不超过 10 吨的居民最多可能有多少户？

***4.** 某食品零售店为某厂代销一种面包，未售出的面包可退回厂家，已统计销售情况发现，当这种面包的单价定为 7 角时，每天卖出 160 个. 在此基础上，这种面包的单价每提高 1 角时，该零售店每天就会少卖出 20 个. 考虑了所有因素后知道，该零售店每个面包的成本是 5 角. 设这种面包的单价为 x（角），零售店每天销售这种面包所获得的利润为 y（角）.

(1) 用含 x 的代数式分别表示出每个面包的利润与卖出的面包个数；

(2) 求 y 与 x 之间的函数关系式；

(3) 当面包单价定为多少时，该零售店每天销售这种面包获得的利润最大？最大利润为多少？

归纳与总结

1. 知识要点

(1) 函数

①以 x 为自变量的函数 $y=f(x)$ 是集合 A 到集合 B 的一种对应关系，其中 A 和 B 都是非空的数集，对于 A 中的________，B 中都有________和它对应. 自变量 x 取值的集合 A 就是函数 $y=f(x)$ 的________，和 x 对应的 y 的值就是函数值，函数值的集合 C 就是函数 $y=f(x)$ 的________ ($C\subseteq B$).

②函数的表示方法通常有三种：解析法、________、________.

(2) 函数的性质

①单调性

对于给定区间上的函数 $f(x)$，如果对于这个区间上的任意两个值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有________，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数；如果对于这个区间上的任意两个值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有________，就说 $f(x)$ 在这个区间上是减函数；对于函数 $y=f(x)$ 在某个区间上单调递增或单调递减的性质，叫做 $f(x)$ 在这个区间上的________，这个区间叫做 $f(x)$ 的________.

②奇偶性

如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有________，那么 $f(x)$ 就叫做奇函数；如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有________，那么 $f(x)$ 就叫做偶函数.

(3) 函数的实际应用

在实际生活中，量与量之间的关系往往存在着函数关系. 如果根据已知条件把函数关系式求出来，便可深入研究函数性质，解决实际问题.

2. 重点与难点

本单元学习的重点是函数的概念，函数的图像及函数的应用.

难点是对函数概念、函数的单调性、奇偶性的理解，以及用函数知识解实际应用题.

函数符号 $y=f(x)$ 是较难理解的抽象符号之一，它的内涵是“对于定义域中的任意 x，在对应关系 f 的作用下即可得到唯一的 y”. 在有些问题中，对应关系 f 可用一个解析式表示，但在不少问题中，对应关系 f 不便用或不能用解析式表示，这时，就必须采用其他方式，如图像或表格等.

函数图像是发现函数性质的直观载体，观察函数图像时，首先注意到的是图像的上升或下降（单调性），是否具有某种对称性（奇偶性），然后

是图像在某些特殊位置的状态（如最大值），但是由图像直观获得的结论还需要从数量关系的角度通过逻辑推理加以确认，这充分体现了数形结合的思想．

例1 下列各式中，y 与 x 不能构成函数关系的是（　　）．

A. $y=|x|$，$x\in\mathbf{R}$　　　　B. $y=\pm x$，$x\in\mathbf{R}$

C. $y=\sqrt{x^2}$，$x\in\mathbf{R}$　　　　D. $y=-\sqrt{x}$，$x\in\mathbf{R}_+$

分析：根据函数的概念，对于定义域内的每一个 x 值，按照 y 与 x 的关系式，y 都能有唯一的值与之对应．但在 B 中，当我们取 $x=1$ 时，y 却得到了 ±1 两个值，因此在 B 中，y 与 x 不能构成函数关系，故应选 B.

答案：B.

例2 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-6x+5}$；　　　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2-6x+5}$．

解：(1) 要使 $\sqrt{x^2-6x+5}$ 有意义，必须使 $x^2-6x+5\geqslant0$，

即　$x\leqslant1$ 或 $x\geqslant5$.

$\therefore$　$y=\sqrt{x^2-6x+5}$ 的定义域是 $\{x\mid x\leqslant1$ 或 $x\geqslant5\}$．

(2) 要使 $\dfrac{1}{x^2-6x+5}$ 有意义，必须使 $x^2-6x+5\neq0$，

即　$x\neq1$ 且 $x\neq5$.

$\therefore$　$y=\dfrac{1}{x^2-6x+5}$ 的定义域是 $\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq1$ 且 $x\neq5\}$．

例3 若 $f(x)$ 是偶函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)$ 是增函数，则下列结论中，正确的是（　　）．

A. $f(3)>f(-2)$　　　　B. $f(3)=f(-2)$

C. $f(3)<f(-2)$　　　　D. $f(-3)=-f(3)$

分析：根据 $f(x)$ 是偶函数，可知 $f(3)=f(-3)$，而当 $x<0$ 时，$f(x)$ 是增函数，所以由 $-3<-2$，可得 $f(-3)<f(-2)$，即 $f(3)<f(-2)$，故应选 C.

答案：C.

例4 (1) 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是定义域为 A 的偶函数．令

$$h(x)=f(x)+g(x),\ p(x)=f(x)g(x).$$

试问：$h(x)$，$p(x)$ 是否仍为偶函数？

(2) 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是定义域为 A 的奇函数．令

$$h(x)=f(x)+g(x),\ p(x)=f(x)g(x).$$

试问：$h(x)$是否为奇函数？$p(x)$是否为偶函数？

解：(1) $\because$ $f(x)$，$g(x)$都是定义域为A的偶函数，

$\therefore$ 对于任意$x\in A$，有$-x\in A$，并且

$f(-x)=f(x),\ g(-x)=g(x)$，

$\therefore$ $h(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=h(x)$，

$p(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=p(x)$，

$\therefore$ $h(x)$，$p(x)$仍为偶函数．

(2) $\because$ $f(x)$，$g(x)$都是定义域为A的奇函数，

$\therefore$ 对于任意$x\in A$，有$-x\in A$，并且

$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=-g(x)$，

$\therefore$ $h(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)$

$=-[f(x)+g(x)]=-h(x)$，

$p(-x)=f(-x)g(-x)=[-f(x)][-g(x)]$

$=f(x)g(x)=p(x)$，

$\therefore$ $h(x)$是奇函数，$p(x)$是偶函数．

综合练习 三

A 组

1. 填空题：

(1) 若 $2x-3y-2=0$，则 $f(x)=$________；

(2) 若 $f(x)=3-4x$，则 $f(-1)=$________；

(3) 若 $f(x)=x^2+3x+1$，则 $f(-x)=$________；

(4) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 是减函数，则 $f(-2)$____$f(-1)$；

(5) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-2)$____$f(2)$.

2. 选择题：

(1) 若 $f(x)=2x^2+1$，且 $x\in\{-1, 0, 1\}$，则 $f(x)$ 的值域是（　　）；

A. $\{-1, 0, 1\}$　　B. $(1, 3)$

C. $[1, 3]$　　D. $\{1, 3\}$

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数，且在 $x>0$ 时是增函数，则下列结论中正确的是（　　）.

A. $f(-1)<f(-2)<f(-3)$　　B. $f(-3)<f(-2)<f(-1)$

C. $f(-2)<f(-1)<f(-3)$　　D. $f(-3)<f(-1)<f(-2)$

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{2x-5}$；　(2) $y=\dfrac{1}{2x-5}$；　(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}$；

(4) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$；　(5) $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-1}$；　(6) $y=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$；

(7) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}$；　(8) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}}$.

4. 求下列函数的值域：

(1) $f(x)=3x-1$，$x\in\{1, 2, 3\}$；　(2) $f(x)=3x-1$，$x\in(1, 3)$；

(3) $f(x)=3x-1$.

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^2+1$；　(2) $f(x)=2x^3$；

(3) $f(x)=2x$；　(4) $f(x)=x+1$.

6. 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

7. 根据条件，确定函数 $f(x)$ 的解析式：

(1) 已知 $f(x)$ 是正比例函数，且 $f(-1)=3$；

(2) 已知$f(x)$是反比例函数，且$f(-1)=3$；

(3) 已知$f(x)$是一次函数，且$f(-1)=3$，$f(0)=2$；

(4) 已知$f(x)$是二次函数，它的图像经过原点，且$f(-1)=3$，$f(1)=1$.

8. 某商品的价格为 60 元时，销售量为 1800 件，价格每提高 3 元，销售量就减少 600 件，试求这种商品的销售量与价格之间的函数关系，并求出当价格为多少时，这种商品卖不出去.

B 组

1. 选择题：

(1) 若$f(x)=x^2+3x+1$，则$f(x+1)=$(　　)；

A. x^2+3x+2　　B. x^2+3x+5

C. x^2+5x+5　　D. x^2+5x+6

(2) 若$f(2x)=8x^2+7$，则$f(1)=$(　　)；

A. 32　　B. 9　　C. 15　　D. 3

(3) $f(x)=x|x|$是（　　）；

A. 偶函数，增函数　　B. 偶函数，减函数

C. 奇函数，增函数　　D. 奇函数，减函数

(4) 函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{4x-1}}{\sqrt{2-3x}}$的定义域是（　　）.

A. $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{3}\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{3}\right]$

C. $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{3}\right]$　　D. $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{3}\right)$

2. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{3x^2-4x+1}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{3x^2-4x+1}$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$；　　(4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$.

3. 求下列函数的值域：

(1) $f(x)=x^2+2x+1$；　　(2) $f(x)=x^2+2x+2$.

4. 已知$f(x)=ax^2+bx+c$，且$f(1)=5$，$f(2)=12$，$f(-1)=9$，求$f(-2)$.

***5.** 已知$f(x)=ax^3+bx+2$，且$f(2)=8$，求$f(-2)$的值.

***6.** 已知$y=f(x)$是奇函数，当$x>0$时，$f(x)=x(1+x)$，求$x<0$时，$f(x)$的解析式.

7. 设$f(x)$是定义域为A的偶函数，$g(x)$是定义域为A的奇函数. 令$h(x)=f(x)+g(x)$，$p(x)=f(x)g(x)$. 试问：$h(x)$是奇函数还是偶函数？$p(x)$是否为奇函数？

阅读空间

抛物线和最速降线

我们已经知道，二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$\alpha\neq0$）的图像是一条抛物线．

通常，我们把一个点在运动的过程中所留下的“痕迹”叫做这个动点的轨迹．实际上还可以把动点的轨迹看做是满足某种条件的所有的点组成的图形．例如，我们可以把线段的垂直平分线看做是一个动点按照“到线段两端距离相等”的规律运动时留下的“痕迹”，也可以看做是“到线段两端距离相等”的所有的点组成的图形．所以我们可以说“线段的垂直平分线是到线段两段距离相等的点的轨迹”．请你想一想，角平分线可以看做是满足什么条件的点的轨迹？

实际上，抛物线就是一个物体（如炮弹）沿着和水平方向成一定角度的方向被抛出，在不计空气阻力的情况下运动形成的轨迹（图 3－17）．

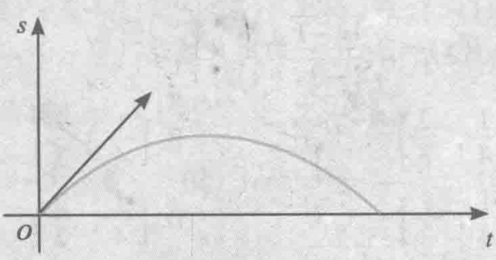


图 3－17

学习了物理学后我们知道，当抛出去的物体的运动方向和水平方向成 30°，速度是 60m/s 时，它的高度 h 就是抛出后的飞行时间 t 的二次函数，它的解析式是 $h=30t-4.9t^2$，因此，我们把二次函数的图像叫做抛物线．

你能利用这个解析式求出一枚炮弹飞行的最高高度和它着地时距离炮位有多远吗？

在数学的发展史上，像这样既有形状美，又有实际背景的美丽曲线还有很多很多！

例如，滑雪运动员在高处沿怎样的曲线滑下来所用的时间最短？建造什么形状的滑梯，才能让儿童从滑梯上滑下来所用时间最短？这就是 17 世纪瑞士数学家约翰·贝努利（Johann Bernoulli，1667.8.6—1748.1.1）于 1696 年向当时的数学家们提出的一个至今仍脍炙人口的“最速降线”问题．

如图3－18，A和B是不在同一铅垂线上的两个点，A点高于B点，动点P在自身的重力作用下，从A点开始，用最短的时间从A滑行到B，它滑行的轨迹是什么曲线？

问题提出不到半年，伟大的英国物理学家牛顿（Issac Newton，1642.12.25—1727.3.20）就找到了问题的解法，得到了问题的答案．奇妙的是，原来这条曲线就是车轮在平地上滚动时，车轮上的一个点的运动轨迹，这个轨迹叫做旋轮线．旋轮线就是最速降线（图3－19）．

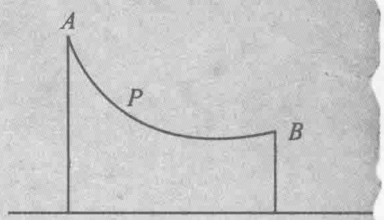


图3－18

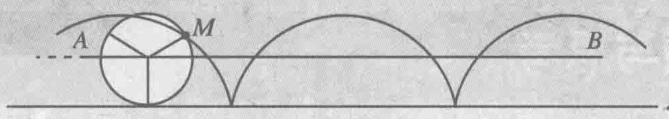


图3－19

最速降线有着广泛的应用，某些古建筑屋顶上的琉璃瓦、办公楼的屋顶，都采用了最佳速降线的形状，它不仅使建筑充满一种和谐雄伟的壮美感，而且可以使雨水在屋顶上停留的时间最短，因而减小酸雨对屋顶的侵蚀，起到了保护建筑的作用．

第四单元　指数函数与对数函数

回顾与思考

函数是一个大家族.我们对于函数的研究还远远没有完成.从本单元开始我们学习一些最常用的基本函数.在现实中，如计算正方形的面积、正方体的体积等可以用幂函数来表示；人口增长、复利计算离不开指数函数；在历史上大数字的计算中，对数函数起过极其重要的作用，并且目前它仍然是一个重要的函数类.在本单元，我们将学习幂函数、指数函数和对数函数的概念与基本性质，并运用它们解决一些简单的实际问题.

4.1 有理数指数幂

1. 整数指数幂

在初中我们学习了正整数指数，我们知道

$$a^2=a\cdot a,$$
$$a^3=a\cdot a\cdot a,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a\text{相乘}}.$$

我们把 a^n 叫做 a 的 n **次幂**，a 叫做幂的**底数**，n 叫做幂的**指数**. 例如

$$2^2=2\times2=4,$$
$$3^4=3\times3\times3\times3=81,$$
$$4^1=4.$$

当 n 是正整数时，a 的 n 次幂 a^n 叫做**正整数指数幂**. 正整数指数幂的运算法则有

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;

(2) $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$;

(3) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$;

(4) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ $(a\neq0,\ m,\ n\in\mathbf{N}_+,\ m>n)$.

练一练 计算：$x^4\div x^3$；$(-6x^2)^2$；$(3x)^2\cdot(-2x)^3$.

议一议

我们在法则 (4) 中限制 $m>n$，如果取消这个限制，会出现什么结果？

如果取消这种限制，则可以将正整数指数幂推广到整数指数幂. 例如，当 $a\neq0$ 时，

$$\frac{a^3}{a^3}=a^{3-3}=a^0,\quad \frac{a^3}{a^5}=a^{3-5}=a^{-2}.$$

这些结果不能用正整数指数幂的定义来解释. 但我们知道，

$$\frac{a^3}{a^3}=1,\quad \frac{a^3}{a^5}=\frac{1}{a^2}.$$

这就启示我们，如果规定：

$$a^0=1,\ a^{-2}=\frac{1}{a^2},$$

则上述运算就合理了．于是我们定义

$$a^0=1\ (a\neq0)$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq0,\ n\in\mathbf{N}_+)$$

由此看出，一个非零实数的负整数指数幂的实质是这个实数相应的正整数指数幂的倒数．

在上述定义下，我们把正整数指数幂推广到整数指数幂．例如，

$$2^0=1,$$

$$(\sqrt{3})^0=1,$$

$$2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8},$$

$$10^{-4}=\frac{1}{10^4}=\frac{1}{10000}=0.0001,$$

$$(3a)^{-2}=\frac{1}{(3a)^2}=\frac{1}{9a^2}\ (a\neq0).$$

例1 计算：8^0；$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$；$0.01^{-3}$；$(3a^2)^{-3}\ (a\neq0)$.

解：$8^0=1$；

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9};$$

$$0.01^{-3}=\left(\frac{1}{100}\right)^{-3}=100^3=10^6=1000000;$$

$$(3a^2)^{-3}=\frac{1}{(3a^2)^3}=\frac{1}{27a^6}.$$

练习

1. 计算：0.5^0；$\left(-\frac{5}{3}\right)^0$；$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$；$(0.01)^{-2}$.
2. 计算：$(-3a^2)^{-2}$；$\left(\frac{1}{3}a^2\right)^{-3}\ (a>0)$.

2. n 次根式

在初中定义过平方根和立方根的概念. 因为 $(\pm5)^2=25$，所以 ±5 是 25 的平方根，也叫二次方根；因为 $(-3)^3=-27$，所以 -3 是 -27 的立方根，也叫三次方根.

工具箱

如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的平方根；如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的立方根.

类似地，因为 $(\pm2)^4=16$，所以可以把 ±2 叫做 16 的四次方根；因为 $2^5=32$，所以可以把 2 叫做 32 的五次方根.

一般地，若 $x^n=a$ $(n>1$，且 $n\in\mathbf{N}_+)$，我们把 x 叫做 a 的 ***n* 次方根.**

当 n 是奇数时，任何一个数的 n 次方根都唯一存在，且正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数. 这时，a 的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示.

例如，因为 $2^3=8$，所以 $\sqrt[3]{8}=2$；因为 $(-2)^5=-32$，所以 $\sqrt[5]{-32}=-2$.

当 n 是偶数时，正数的 n 次方根有两个，它们互为相反数，分别表示为 $\sqrt[n]{a}$ 和 $-\sqrt[n]{a}$，也可以合并写为 $\pm\sqrt[n]{a}$ $(a>0)$.

例如，因为 $2^4=16$，$(-2)^4=16$，所以 16 的四次方根有两个，即 2 或 -2，可表示为 $\pm\sqrt[4]{16}=\pm2$.

学习小贴示

由于任何一个实数的偶次方都不会是负数，所以负数在实数范围内没有偶次方根，即在实数范围内负数的偶次方根无意义.

零的任何次方根都是零，记做 $\sqrt[n]{0}=0$.

正数 a 的正的 n 次方根叫做 a 的 ***n* 次算术根.**

例如，2 叫做 16 的四次算术根.

想一想

(1) 7 的 5 次方根怎么表示？-7 的 5 次方根怎么表示？

(2) $\sqrt[4]{16}=\pm2$ 这样的写法对吗？

(3) 负数有 6 次方根吗？

例2 求值：

(1) $\sqrt[4]{81}$；　　(2) 81 的 4 次方根.

解：(1) 因为 $3^4=81$，且 $3>0$，所以 $\sqrt[4]{81}=3$.

(2) 因为 $(\pm3)^4=81$，所以 81 的 4 次方根有 2 个，可合并写成 $\pm\sqrt[4]{81}=\pm3$.

练一练

(1) 说出下列实数的 4 次方根：16，$\frac{16}{81}$，$\frac{1}{625}$．

(2) 说出下列实数的 5 次方根：32，-32，$-\frac{1}{32}$．

当 $\sqrt[n]{a}$ 有意义时，式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做 ***n* 次根式**，其中 n 叫做**根指数**，a 叫做**被开方数**.

想一想

(1) $\sqrt[5]{-1}$ 是几次根式？根指数等于几？被开方数是多少？

(2) $\sqrt[6]{24}$ 是几次根式？根指数等于几？被开方数是多少？

练习

1. 填空题：

(1) $\sqrt[3]{0}=$______；　(2) $\sqrt[3]{-64}=$______；　(3) $(\sqrt[4]{7})^4=$______；

(4) $\sqrt[4]{16}=$______；　(5) $\sqrt[6]{(-3)^6}=$____；　(6) $(\sqrt[5]{-6})^5=$____．

2. 求值：

(1) $\frac{1}{4}$ 的平方根；　(2) 243 的 5 次方根；　(3) 256 的 4 次方根.

3. 分数指数幂

议一议

a^m 表示 m 个 a 的连乘积，且 $(a^m)^n=a^{mn}$，$\sqrt[n]{a^n}=a\ (a\geqslant 0)$ 成立.

观察 $\sqrt[4]{a^{12}}=\sqrt[4]{(a^3)^4}=a^3$，$\sqrt[3]{a^{15}}=\sqrt[3]{(a^5)^3}=a^5\ (a\geqslant 0)$. 联想到 $3=\frac{12}{4}$，$5=\frac{15}{3}$，对于根式 $\sqrt[n]{a^m}$ 你能得出什么结论？

因为 $3=\frac{12}{4}$，$5=\frac{15}{3}$，所以 $\sqrt[4]{a^{12}}$ 可以写成 $a^{\frac{12}{4}}$，$\sqrt[3]{a^{15}}$ 可以写成 $a^{\frac{15}{3}}$ 的形式．就是说，我们可以将一个根式表示成一个幂的形式，并且幂的指数部分是一个分数，分母是根式的根指数，分子是被开方数的指数.

想一想 由上面结论的形式，你可以将 $a^{\frac{3}{4}}$，$b^{\frac{7}{4}}$ 写成根式的形式吗？

一般地，当 m，$n\in\mathbf{N}_{+}$ 且 $n>1$ 时，规定

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}\ (a\geqslant 0),$$

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^{m}}}\ (a>0).$$

有了上述规定，我们可以把整数指数幂的概念推广到了有理数指数幂.

例3 用根式表示下列分数指数幂（a，b 为正数）：

（1）$a^{\frac{9}{5}}$；（2）$b^{-\frac{13}{6}}$.

解：（1）$a^{\frac{9}{5}}=\sqrt[5]{a^{9}}$；

（2）$b^{-\frac{13}{6}}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{b^{13}}}$.

例4 用分数指数幂表示下列各式（a，b，c 为正数）：

（1）$\sqrt{a}$；（2）$\sqrt[3]{a^{2}}$；（3）$\dfrac{1}{\sqrt{c}}$；（4）$\dfrac{1}{\sqrt[5]{b^{4}}}$.

解：（1）$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$；（2）$\sqrt[3]{a^{2}}=a^{\frac{2}{3}}$；

（3）$\dfrac{1}{\sqrt{c}}=c^{-\frac{1}{2}}$；（4）$\dfrac{1}{\sqrt[5]{b^{4}}}=b^{-\frac{4}{5}}$.

例5 求值：

（1）$49^{\frac{1}{2}}$；（2）$32^{-\frac{1}{5}}$.

解：（1）$49^{\frac{1}{2}}=\sqrt{49}=7$；

（2）$32^{-\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{32}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^{5}}}=\dfrac{1}{2}$.

练习

1. 用根式表示下列分数指数幂（a，b 为正数）：

（1）$a^{\frac{4}{5}}$；（2）$b^{\frac{8}{3}}$；（3）$c^{-\frac{3}{7}}$.

2. 用分数指数幂表示下列各式（a，c 为正数）：

（1）$\sqrt[5]{a^6}$；（2）$\sqrt[3]{c^2}$；（3）$\dfrac{2}{\sqrt[7]{a^3}}$.

3. 求值：

（1）$1000^{\frac{2}{3}}$；（2）$81^{-\frac{1}{4}}$；（3）$\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

习题 一

1. 填空题：

（1）$(-1)^0=$______；（2）$\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-2}=$______；

（3）$\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=$______；（4）$0.125^{-\frac{1}{3}}=$______.

2. 说出下列实数的 4 次方根：

（1）625；（2）$\dfrac{1}{16}$；（3）4；（4）32.

3. 说出下列实数的 3 次方根：

（1）27；（2）-8；（3）$\dfrac{1}{125}$；（4）-4.

4. 把下列各式写成幂的形式（$a>0$，$b>0$）：

（1）$\sqrt[3]{a^2}$；（2）$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$；（3）$\sqrt[3]{(a+b)^2}$.

5. 把下列各式写成根式的形式（$a>0$，$b>0$，$c>0$）：

（1）$a^{\frac{5}{3}}$；（2）$b^{-\frac{11}{5}}$；（3）$c^{\frac{2}{3}}$.

6. 求值：$\left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$.

4.2 实数指数幂及其运算法则

议一议

整数指数幂有运算性质 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$，$(ab)^n=a^nb^n$，当我们把指数推广到了有理指数幂后，上述运算法则是否仍然成立呢？$a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{8}{3}}$是否等于 $a^{\frac{1}{3}+\frac{8}{3}}$呢？

因为 $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{8}{3}}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^8}=\sqrt[3]{aa^8}=\sqrt[3]{a^9}=a^3=a^{\frac{9}{3}}$，而 $a^{\frac{1}{3}+\frac{8}{3}}=a^{\frac{9}{3}}$，因此 $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{8}{3}}$确实等于 $a^{\frac{1}{3}+\frac{8}{3}}$. 这说明，当我们把指数推广到了有理指数幂后，$a^ma^n=a^{m+n}$仍然成立.

可以证明，有理数指数幂的运算法则与整数指数幂的运算法则完全相同，即

(1) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$ $(a>0,\ r,\ s\in\mathbf{Q})$；

(2) $(a^r)^s=a^{rs}$ $(a>0,\ r,\ s\in\mathbf{Q})$；

(3) $(ab)^r=a^rb^r$ $(a,\ b>0,\ r,\ s\in\mathbf{Q})$.

显然，整数指数幂的运算法则是有理指数幂运算法则的特殊情况.

例1 求下列各式的值：

(1) $8^{\frac{2}{3}}$；　(2) $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$；　(3) $16^{-\frac{3}{4}}$；　(4) $3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}$.

解：(1) $8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\times\frac{2}{3}}=2^2=4$；

(2) $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}}=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]^{\frac{3}{4}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4\times\frac{3}{4}}=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$；

(3) $16^{-\frac{3}{4}}=(2^4)^{-\frac{3}{4}}=2^{4\times(-\frac{3}{4})}=2^{-3}=\frac{1}{8}$；

(4) $3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}=3^1\cdot3^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{1}{6}}=3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=3^2=9$.

例2 用分数指数幂表示下列各式 $(a>0,\ b>0)$；

(1) $\sqrt[6]{a^3b^4}$；　(2) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$.

解：(1) $\sqrt[6]{a^3b^4}=(a^3b^4)^{\frac{1}{6}}=a^{3\times\frac{1}{6}}b^{4\times\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$；

(2) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}=a^{\frac{2}{3}}a^{-1}=a^{\frac{2}{3}+(-1)}=a^{-\frac{1}{3}}$.

例3 计算：$2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{32}\cdot\sqrt[4]{2}$.

解：原式 $=2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot(2^5)^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}$

$$=2\times 2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{5}{4}}\times 2^{\frac{1}{4}}$$

$$=2^{1+\frac{1}{2}+\frac{5}{4}+\frac{1}{4}}$$

$$=2^3$$

$$=8.$$

从这个例题可以看出，进行根式运算时，一般可以把它化成幂的运算.

练习

1. 计算：

（1）$125^{\frac{2}{3}}$；　（2）$16^{\frac{3}{4}}$；　（3）$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$；　（4）$32^{-\frac{2}{5}}$；

（5）$(0.01)^{\frac{3}{2}}$；（6）$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

2. 化简（$a>0$，$b>0$）：

（1）$a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{5}{6}}$；（2）$(a^6b^{-9})^{\frac{1}{3}}$；（3）$\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2}$；（4）$\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}$.

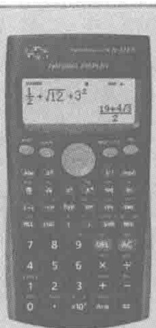
当 $a>0$ 时，还可以把有理数指数幂推广到无理数指数幂，有理数指数幂的运算法则对于实数指数幂仍然成立，即

（1）$a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}$（$a>0$，$\alpha$，$\beta\in\mathbf{R}$）；

（2）$(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\cdot\beta}$（$a>0$，$\alpha$，$\beta\in\mathbf{R}$）；

（3）$(a\cdot b)^\alpha=a^\alpha\cdot b^\alpha$（$a$，$b>0$，$\alpha\in\mathbf{R}$）.

利用计算器* 可以快捷地进行幂的运算. 由于计算器的型号不同，进行同一题的计算，按键的方式会略有不同. 下面我们将介绍利用计算器求 a^b 值的方法.



* 本书涉及计算器使用的内容，均采用卡西欧 fx－82ES 型计算器作演示说明，该型号计算器使用说明见附录 1.

例4 求下列各式的值（精确到0.01）：

（1）$5^{\frac{1}{3}}$；（2）$\left(\frac{64}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$；（3）$25.8^{-\frac{3}{4}}$；（4）$\pi^{-\frac{4}{5}}$；（5）$3^{\sqrt{2}}$.

解：第一步：将输入格式设置为数学格式，即“Math”状态，按键 SHIFT MODE 1；

第二步：将计算结果的精确度设置为小数点后2位，按键 SHIFT MODE 6 2.

（1）依次按键：5 $x^{■}$ $\frac{■}{□}$ 1 ↓ 3 → =，

计算器显示

（2）依次按键：($\frac{■}{□}$ 64 ↓ 49 →) $x^{■}$ (−) $\frac{■}{□}$ 1 ↓ 2 → = S⇔D，

计算器显示

（3）依次按键：25 · 8 $x^{■}$ (−) $\frac{■}{□}$ 3 ↓ 4 → =，

计算器显示

（4）依次按键：SHIFT ×10ˣ $x^{■}$ (−) $\frac{■}{□}$ 4 ↓ 5 → =，

计算器显示

（5）依次按键：3 $x^{■}$ $\sqrt{■}$ 2 → =，

计算器显示

练习

利用计算器求下列各式的值（精确到0.01）：

（1）$9^{\frac{1}{5}}$；（2）$5^{\frac{3}{4}}$；（3）$3^{-\frac{5}{7}}$；

（4）$0.036^{\frac{1}{3}}$；（5）$100^{\sqrt{5}}$；（6）$\pi^{-\frac{1}{2}}$.

习题 二

1. 计算：

（1）$25^{\frac{1}{2}}$；（2）$\left(\frac{81}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$；（3）$27^{\frac{2}{3}}$；

（4）$10000^{\frac{1}{4}}$；（5）$4^{-\frac{1}{2}}$；（6）$\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$.

2. 计算（其中字母均为正数）：

（1）$a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{5}{8}}$；（2）$a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{5}{6}}\div a^{-\frac{1}{2}}$；

（3）$(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}})^{6}$；（4）$4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\div\left(-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\right)$.

3. 计算：

（1）$2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}$；（2）$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$.

4. 利用计算器比较下列各组值的大小：

（1）$0.41^{0.1}$与$0.43^{0.1}$；（2）π^{-3}与3.14^{-3}.

5. 利用计算器计算下列各题的近似值（精确到0.001）：

（1）$\sqrt{111}$；（2）$\sqrt[5]{12}$；（3）$\left(\frac{2}{3}\right)^{0.7}$；（4）$\sqrt[7]{(-13)^{3}}$.

6. 利用计算器验证下列各式的值（精确到0.01）：

（1）$9.41^{-\frac{5}{4}}\approx 0.06$；（2）$\frac{1}{\sqrt[4]{15^{3}}}\approx 0.13$.

4.3 幂函数

引例

先看几个具体问题：

（1）如果张红购买了每千克 1 元的蔬菜 w 千克，那么她需要支付 $p=w$ 元，这里 p 是 w 的函数；

（2）如果正方形的边长为 a，那么正方形的面积 $S=a^2$，这里 S 是 a 的函数；

（3）如果立方体的边长为 a，那么立方体的体积 $V=a^3$，这里 V 是 a 的函数；

（4）如果一个正方形场地的面积为 S，那么这个正方形的边长 $a=S^{\frac{1}{2}}$，这里 a 是 S 的函数；

（5）如果某人 t 秒内骑车行进了 1 千米，那么他骑车的平均速度 $v=t^{-1}$千米/秒，这里 v 是 t 的函数．

想一想 以上问题中的函数具有什么共同特征？

上述问题中涉及的函数，都是形如 $y=x^{\alpha}$ 的函数．

一般地，函数 $y=x^{\alpha}$ 叫做**幂函数**，其中 x 是自变量，α 是实常数．

例1 指出幂函数 $y=x^3$ 的定义域，并作出它的图像．

解：函数 $y=x^3$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，列表如下：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	-8	-1	0	1	8	…

在直角坐标系中，以表中的每一组 x，y 为的值为坐标，描出相应的点，用光滑的曲线连接这些点，得到函数 $y=x^3$ 的图像，如图 4－1.

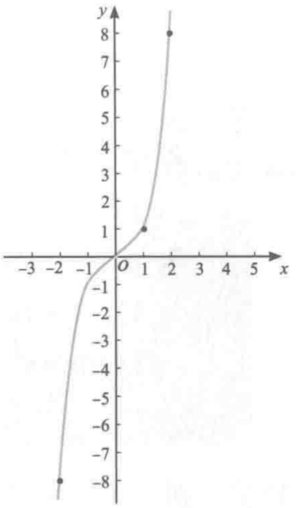


图 4－1

例2 指出幂函数 $y=x^{-2}$ 的定义域，并作出它的图像.

解：因为 $x^{-2}=\frac{1}{x^2}$，所以 $y=x^{-2}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

列表如下：

x	…	-2	-1	$\frac{1}{2}$	1	2	…
y	…	$\frac{1}{4}$	1	4	1	$\frac{1}{4}$	…

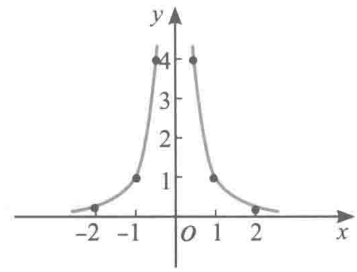


图 4－2

以表中的每一组 x、y 的值为坐标，描出相应的点，用光滑的曲线联结这些点，得到函数 $y=x^{-2}$ 的图像，如图 4－2.

练习

1. (1) $y=\sqrt[3]{x}$ 是幂函数吗？如果是，α 等于多少？定义域是什么？

(2) $y=\sqrt[4]{x^3}$ 是幂函数吗？如果是，α 等于多少？定义域是什么？

2. 在函数 $y=\frac{1}{x^2}$，$y=2x^2$，$y=x^2+x$，$y=1$ 中，哪几个函数是幂函数？

3. 指出幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域，并作出它的图像.

习题 三

1. 填空题：

(1) $y=\frac{1}{x^2}$ 是 $\alpha=$______的幂函数，定义域为__________；

(2) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 是 $\alpha=$______的幂函数，定义域为__________.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=x^{-4}$；　　(2) $y=x^{\frac{3}{2}}$.

3. 求下列函数的定义域，并在同一坐标系内作出它们的图像：

(1) $y=x$；　　(2) $y=x^2$；　　(3) $y=x^3$；

(4) $y=x^{\frac{1}{2}}$；　　(5) $y=x^{-1}$.

4.4 指数函数的图像与性质

1. 指数函数的定义

引例

（1）细胞分裂问题

任何有机体都是由细胞作为基本单位组成的，每个细胞每次分裂为 2 个，则 1 个这样的细胞第一次分裂后变为 2 个细胞，第 2 次分裂后就得到 4 个细胞，第 3 次分裂后就得到 8 个细胞……

在这个问题中，分裂的次数是一个变量，我们把它看做自变量，用 x 表示. 每次分裂后，细胞的个数也是一个变量. 显然这个变量是自变量 x 的函数，用 y 表示. 如何用 x 来计算 y 呢？

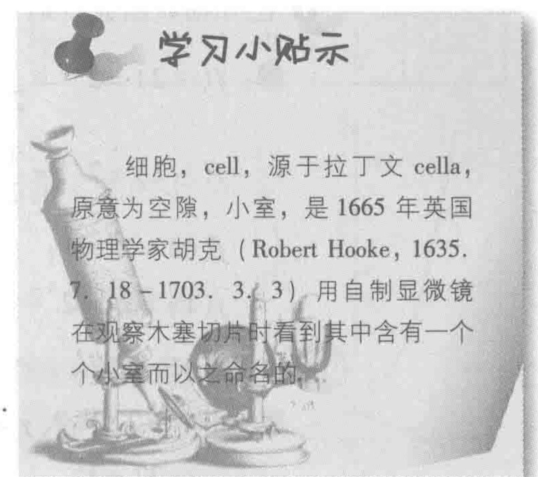
$x=0$，$y=2^0=1$；

$x=1$，$y=2^1=2$；

$x=2$，$y=2^1\times2=2^2=4$；

$x=3$，$y=2^2\times2=2^3=8$；

……



学习小贴示

细胞，cell，源于拉丁文 cella，原意为空隙，小室，是 1665 年英国物理学家胡克（Robert Hooke，1635. 7. 18－1703. 3. 3）用自制显微镜在观察木塞切片时看到其中含有一个个小室而以之命名的.

这样，我们可归纳出，第 x 次分裂后，细胞的个数为 $y=2^x$.

这个函数的定义域是非负整数集. 由 $y=2^x$，任给一个 x 值，我们就可求出对应的 y 值.

（2）一种放射性元素不断衰变为其他元素，每经过一年剩留的质量约是原来的 84%. 求出这种元素的剩留量随时间（单位：年）变化的函数关系.

设该放射性元素最初的质量为 1，时间变量用 x 表示，剩余量用 y 表示，则

经过 1 年，$y=1\times84\%=0.84^1$；

经过 2 年，$y=1\times0.84\times0.84=0.84^2$；

……

这样，我们可归纳出，经过 x 年，$y=0.84^x$.

这个函数的定义域是正整数集. 由 $y=0.84^x$，任意给一个 x 值，我们就可以求出对应的 y 值.

从这两个实例中，我们得到两个同类型的函数，它们自变量都出现在指数位置上．

一般地，形如 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$ 的函数，叫做**指数函数**．其中 x 是自变量，a 是不等于 1 的正的常数．

函数 $y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=10^x$，$y=e^x$ 等都是指数函数，它们的定义域都是 $(-\infty,\ +\infty)$．

练一练

在函数 $y=2^x$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=10^x$，$y=e^x$，$y=x^{-1}$ 中，哪些是指数函数？

例1 已知指数函数 $f(x)=2^x$，求 $f(-2)$，$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ 的值．

解：$f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$；

$f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$；

$f(0)=2^0=1$；

$f(1)=2^1=2$．

例2 已知指数函数 $y=3^x$，若 $y=27$，求自变量 x 的值．

解：将 $y=27$ 代入 $y=3^x$，得

$27=3^x$，

即 $3^3=3^x$，

所以 $x=3$．

试一试 设 $f(x)=a^x$，若 $f(2)=9$，求 a 的值．

练习

1. 下列函数哪些是指数函数，哪些不是指数函数？为什么？

(1) $y=2.1^x$； (2) $y=3\times 2^x$；

(3) $y=x^3$； (4) $y=3^{-x}$．

2. 已知指数函数 $f(x)=4^x$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(3)$ 的值．

3. 指数函数 $y=a^x$ 经过点（1，3），求出这个函数的解析式.

2. 指数函数的图像

议一议 怎样研究指数函数 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像与性质呢？

先列出 x，y 的对应值表，再用描点法画出图像（如图 4-3）.

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=2^x$	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…

两个函数图像的相同点：图像都在 x 轴的上方，都经过点（0，1）.

两个函数图像的不同点：函数 $y=2^x$ 的图像从左向右逐渐上升；函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像从左向右逐渐下降.

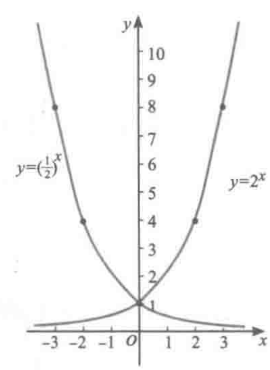
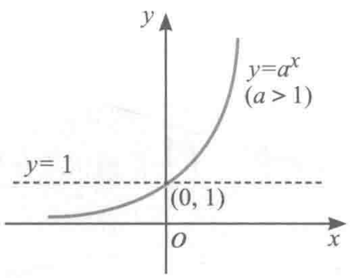
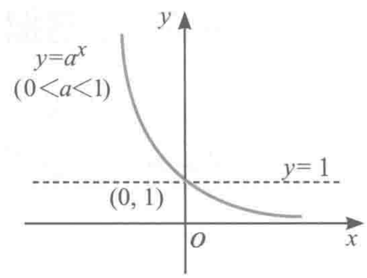


图 4-3

议一议 画出并观察、分析几个底数不同的指数函数的图像，归纳出一般指数函数的图像形状及位置关系.

一般地，指数函数 $y=a^x$ 在底数 $a>1$ 及 $0<a<1$ 这两种情况下的图像形状及位置如下表所示：

指数函数 $y=a^x$ 的图像特征	
$a>1$	$0<a<1$
	
（1）图像都在 x 轴上方	
（2）图像都经过点（0，1）	
（3）图像自左向右逐渐上升	图像自左向右逐渐下降

练习

1. 根据 $y=a^x$（$a>1$）的图像回答，x 取何值时，$y>1$？x 取何值时，$0<y<1$？

2. 根据 $y=a^x$（$0<a<1$）的图像回答，x 取何值时，$y>1$？x 取何值时，$0<y<1$？

3. 指数函数的性质

由指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的图像特征，我们可以得到指数函数的如下性质：

指数函数 $y=a^x$ 的性质	
$a>1$	$0<a<1$
（1）定义域是（$-\infty$，$+\infty$）；值域是（0，$+\infty$）	
（2）当 $x=0$ 时，$y=1$	
（3）在（$-\infty$，$+\infty$）上是增函数	在（$-\infty$，$+\infty$）上是减函数

例3 利用指数函数的单调性，比较下列各题中两个值的大小：

（1）$1.6^{0.1}$ 与 $1.6^{0.2}$；　　（2）$0.7^{-0.1}$ 与 $0.7^{-0.2}$.

解：（1）考察函数 $y=1.6^x$，

$\because$ $1.6>1$，$y=1.6^x$ 是增函数．

且 $0.1<0.2$，

$\therefore$ $1.6^{0.1}<1.6^{0.2}$．

（2）考察函数 $y=0.7^x$，

$\because$ $0<0.7<1$，$y=0.7^x$ 是减函数，

且 $-0.1>-0.2$，

$\therefore$ $0.7^{-0.1}<0.7^{-0.2}$．

***例4** 解下列不等式：

（1）$2^{x^2}<2^x$；（2）$\left(\frac{1}{2}\right)^x<1$．

解：（1）$\because$ $2>1$，$y=2^x$ 是增函数，

于是由 $2^{x^2}<2^x$，得 $x^2<x$．

解这个二次不等式，得 $0<x<1$．

$\therefore$ 不等式的解集是 $\{x\mid 0<x<1\}$．

（2）将不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^x<1$，两边化为同底，即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^0$．

$\because$ $0<\frac{1}{2}<1$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是减函数，

于是由 $\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^0$，得 $x>0$．

$\therefore$ 不等式的解集是 $\{x\mid x>0\}$．

练习

1. 下列函数中哪些是增函数，哪些是减函数？

（1）$y=2.5^x$；（2）$y=2.5^{-x}$；（3）$y=\left(\frac{3}{5}\right)^x$；（4）$y=\left(\frac{5}{3}\right)^x$．

2. 比较下列各题中两个值的大小：

（1）$7^{0.7}$ 与 $7^{0.5}$；（2）$0.1^{-0.1}$ 与 $0.1^{0.1}$．

***3.** 解下列不等式：

（1）$2^{2x}>\frac{1}{8}$；（2）$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}>\frac{1}{9}$．

习题 四

1. 填空题：

(1) 指数函数 $y=a^x$ 中，a 的取值范围是________；

(2) 函数 $y=2^x$ 的定义域是________，值域是________；

(3) 所有指数函数的图像都过点________；

(4) $y=a^x$ 是减函数，则 a 的取值范围是________.

2. 在同一坐标系中画出函数 $y=3^x$ 与函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图像.

***3.** 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{2^x-4}$；　　(2) $f(x)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x-2}$.

4. 求下列函数的值域：

(1) $f(x)=2^x+1$；　　(2) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$.

5. 比较下列各题中两个值的大小：

(1) $3^{0.8}$ 与 $3^{0.7}$；　　(2) $0.75^{-0.2}$ 与 $0.75^{0.2}$；

(3) 0.9^{-1} 与 $0.9^{-1.1}$；　　(4) 1.1^{-2} 与 $1.1^{-1.9}$.

***6.** 解下列不等式：

(1) $3^{1-2x}>3^{2+3x}$；　　(2) $0.3^{x^2}<0.3^{2x}$；

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-3}>1$；　　(4) $3^{x^2-3x}>\frac{1}{9}$.

数学实验

研究参数 a 的取值对指数函数 $y=a^x$ 图像的影响

利用几何画板可以简捷地作出指数函数 $y=a^x$ 的图像．由于底数 a 可取大于0且不等于1的所有实数，所以可以用动点 A 的横坐标表示底数 a 的值，即 A 点的横坐标 X_A 显示的就是 a 的取值．

从左向右拖动点 A，可以发现：

(1) 当底数 $0<a<1$ 时，指数函数是 **R** 上的减函数，且当 $x<0$ 时，底数 α 的值越小，其函数值减小得越快；

(2) 当底数 $a>1$ 时，指数函数是 **R** 上的增函数，且当 $x>0$ 时，底数 α 的值越大，其函数值增长得越快，如图4－4所示．

你还能发现其他的规律吗？

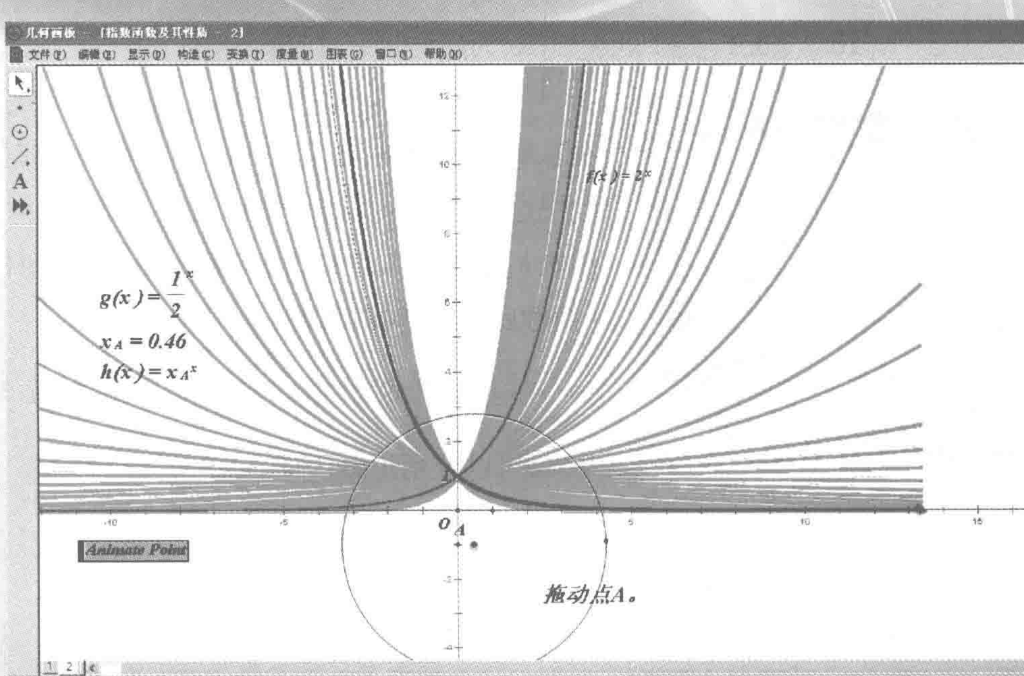


图4－4

4.5 对 数

引例

一个工厂，如果按照每年平均劳动生产增长率6%计算，那么大约要经过多少年它的产值可以翻两番（即增长到原来产值的$2^2=4$倍）?

解决这个问题这就需要求出$(1+6\%)^x=4$中的x的值.

又如上节的细胞分裂问题，要求细胞经过多少次分裂，大约可以达到原来的10倍，也就是要求出$2^x=10$中的x值.

解决这类问题，就是要从已知底数、幂，求出指数．这种方法同我们以前学过的已知底数、指数求幂的方法刚好相反．因此需要我们学习一种新的计算方法——对数.

我们知道

$2^3=8$，3叫做以2为底与8对应的指数；

$5^{\frac{1}{2}}\approx2.236$，$\frac{1}{2}$叫做以5为底与2.236对应的指数；

$10^{-1}=0.1$，-1叫做以10为底与0.1对应的指数.

学习小贴示

纳皮尔（Napier, John, 1550－1617.4.4），苏格兰数学家，他花了20年的时间发明了对数运算，而闻名于世.

一般地，$a^b=N$（$a>0$且$a\neq1$），就是a的b次幂等于N，b叫做以a为底与N对应的指数．我们把这个对应的指数，简称**对数**，记做$b=\log_a N$，读做b是以a为底的N的对数．其中a叫做**底数**（简称底），N叫做**真数**.

在上面的例子中，与幂对应的指数3，$\frac{1}{2}$，-1就可以分别记做

$$\log_2 8=3,$$

$$\log_5 2.236\approx\frac{1}{2},$$

$$\log_{10} 0.1=-1.$$

我们把$a^b=N$叫做**指数式**，$\log_a N=b$叫做**对数式**.

事实上，对数式不过是指数式的另一种表达形式而已，例如，

$$2^3=8 与 3=\log_2 8,$$

这两个式子表达的是2，3，8三个数之间的同一关系.

根据对数定义，可以得到对数恒等式：

$$a^{\log_a N}=N$$

例如：$3^{\log_3 2}=2$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}3}=3$.

根据对数定义，对数具有下列性质：

（1）1的对数等于零，即 $\log_a 1=0$；

（2）底的对数等于1，即 $\log_a a=1$；

（3）零和负数没有对数，即在 $\log_a N$ 中，$N>0$.

练一练

1. 填空题：

（1）$\log_5 5=$________；（2）$\log_{0.3}0.3=$________；

（3）$\log_3 1=$________；（4）$\log_{0.2}1=$________.

2. 计算：$2^{\log_2 7}+2^{\log_2 3}$.

例1 把下列指数式改写成对数式：

（1）$2^5=32$；（2）$4^{\frac{1}{2}}=2$.

解：（1）$\log_2 32=5$；（2）$\log_4 2=\frac{1}{2}$.

例2 把下列对数式改写成指数式：

（1）$\log_8 2=\frac{1}{3}$；（2）$\log_{\frac{1}{2}}4=-2$.

解：（1）$8^{\frac{1}{3}}=2$；（2）$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$.

练习

1. 把下列指数式改写成对数式：

（1）$100^0=1$；（2）$5^1=5$；

（3）$4^3=64$；（4）$8^{\frac{2}{3}}=4$.

2. 把下列对数式改写成指数式：

（1）$\log_2 2=1$；（2）$\log_4 1=0$；

（3）$\log_3 9=2$；（4）$\log_9 3=\frac{1}{2}$.

由指数的定义和幂的运算法则可以知道，如果 $a>0$，那么

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q};$$

$$a^p \div a^q = a^{p-q};$$

$$(a^p)^q = a^{pq};$$

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}.$$

根据对数的定义和幂的运算法则，我们可以得出同一底数对数的运算法则．

1. 两个正数的积的对数，等于这两数的对数的和．即

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \quad (a>0 \text{ 且 } a \neq 1,\ M>0,\ N>0)$$

设 $\log_a M = p$，$\log_a N = q$，

根据对数的定义，得

$$M = a^p,\ N = a^q.$$

$\because \quad MN = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$，

$\therefore \quad \log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N.$

2. 两个正数的商的对数，等于被除数的对数减去除数的对数的差．即

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad (a>0 \text{ 且 } a \neq 1,\ M>0,\ N>0)$$

试一试 请同学们自己推导这个法则．

3. 一个正数的幂的对数，等于幂指数乘以这个数的对数．即

$$\log_a M^q = q\log_a M \quad (a>0 \text{ 且 } a \neq 1,\ M>0,\ q \in \mathbf{R})$$

设 $\log_a M = p$，那么 $M = a^p$.

$\because \quad M^q = (a^p)^q = a^{pq}$，

$\therefore \quad \log_a M^q = pq = q\log_a M.$

从积、商、幂的对数性质可以看出，对数具有把运算“降级”的功能：即把真数的乘法转化成对数的加法，真数的除法转化成对数的减法，真数的乘方转化成对数与幂指数的乘法．

但是要注意，真数的加法和减法不能转化成对数的运算.

想一想

当 $a>0$ 且 $a\neq1$，$x>0$ 时，下列各式成立吗？为什么？

（1）$\log_2(8+2)=\log_2 8+\log_2 2$；　（2）$\log_a(2x)=2\log_a x$；

（3）$\log_{10}\sqrt[3]{a^2}=\frac{2}{3}\log_{10}a$；　（4）$\log_2(4\div2)=\frac{\log_2 4}{\log_2 2}$.

例3 求下列各式的值：

（1）$\log_3(3^5\times9^{-2})$；　（2）$\log_{10}\sqrt[3]{100}$；

（3）$\log_{10}2+\log_{10}5$；　（4）$\log_4 5-\log_4 20$.

解：（1）$\log_3(3^5\times9^{-2})=\log_3 3^5+\log_3 3^{-4}=5-4=1$；

（2）$\log_{10}\sqrt[3]{100}=\log_{10}10^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$；

（3）$\log_{10}2+\log_{10}5=\log_{10}(2\times5)=\log_{10}10=1$；

（4）$\log_4 5-\log_4 20=\log_4\frac{5}{20}=\log_4 4^{-1}=-1$.

练一练

求下列各式的值：

（1）$\log_3(27\times9^2)=$ ________；　（2）$\log_7\sqrt[3]{49}=$ ________；

（3）$\log_{10}8+\log_{10}125=$ ________；　（4）$\log_3 5-\log_3 15=$ ________.

例4 用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$ 表示下列各式：

（1）$\log_a\frac{x^3y^2}{\sqrt{z}}$；　（2）$\log_a\frac{\sqrt{y}}{x^2\sqrt[3]{z}}$.

解：（1）
$$\begin{aligned}\log_a\frac{x^3y^2}{\sqrt{z}}&=\log_a x^3y^2-\log_a\sqrt{z}\\&=\log_a x^3+\log_a y^2-\log_a z^{\frac{1}{2}}\\&=3\log_a x+2\log_a y-\frac{1}{2}\log_a z;\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}\log_a\frac{\sqrt{y}}{x^2\sqrt[3]{z}}&=\log_a\sqrt{y}-\log_a x^2\sqrt[3]{z}\\&=\log_a y^{\frac{1}{2}}-(\log_a x^2+\log_a z^{\frac{1}{3}})\\&=\frac{1}{2}\log_a y-2\log_a x-\frac{1}{3}\log_a z.\end{aligned}$$

我们把以 10 为底的对数叫做**常用对数**，并且 $\log_{10}N$ 可简写成 $\lg N$，把以 e 为底的对数叫做**自然对数**，并且 $\log_e N$ 可简写为 $\ln N$.

对于常用对数，我们知道

$$
\begin{aligned}
&\cdots\cdots\\
&\lg1000=\lg10^3=3;\\
&\lg100=\lg10^2=2;\\
&\lg10=\lg10^1=1;\\
&\lg1=\lg10^0=0;\\
&\lg0.1=\lg10^{-1}=-1;\\
&\lg0.01=\lg10^{-2}=-2;\\
&\lg0.001=\lg10^{-3}=-3;\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

因此，10 的整数次幂的常用对数是一个整数，即

$$\lg10^n=n\ (n\text{ 是整数}).$$

练习

1. 用 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 表示下列各式：

（1）$\lg(xyz)$；　（2）$\lg\dfrac{xy^2}{z}$；　（3）$\lg\dfrac{xy^3}{\sqrt{z}}$；　（4）$\lg\dfrac{\sqrt{x}}{y^2z}$.

2. 计算：

（1）$\log_3(27\times9^2)$；（2）$\lg100^2$；（3）$\lg0.00001$；（4）$\log_7\sqrt[3]{49}$.

3. 计算下列各式的值：

（1）$\log_2 6-\log_2 3$；　（2）$\lg5+\lg2$；

（3）$\log_5 3+\log_5\dfrac{1}{3}$；　（4）$\log_7 3-\log_7 21$.

求任何一个正数的常用对数和自然对数，我们可以直接使用计算器求解.

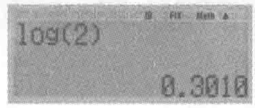
例5 计算下列各式的值（精确到 0.0001）：

（1）$\lg2$；　（2）$\ln10$.

解： 设置计算结果的精确度为 0.0001，按键 SHIFT MODE 6 4.

（1）依次按键：log 2) =，

计算器显示



(2) 依次按键：[ln] 10 [)] [=]，

计算器显示

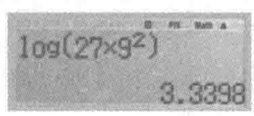
例6 计算下列各式的值（精确到 0.0001）：

(1) $\lg(27\times9^{2})$； (2) $\lg(\sqrt[3]{49})$．

解：设置计算结果的精确度为 0.0001，按键 [SHIFT] [MODE] [6] [4]．

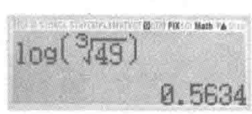
(1) 依次按键：[log] 27 [×] 9 [x^2] [)] [=]，

计算器显示



(2) 依次按键：[log] [SHIFT] [$\sqrt{\blacksquare}$] 49 [▶] [)] [=]，

计算器显示



练 习

1. 用计算器计算（精确到 0.0001）：

(1) lg3； (2) lg45.6； (3) lg0.032.

2. 用计算器计算（精确到 0.0001）：

(1) ln5； (2) ln0.78.

3. 用计算器计算（精确到 0.0001）：

(ln2.7)(ln8)+3.

习题 五

1. 用对数形式表示 x，并化简：

（1）$36^x=6$；　（2）$3^x=1$；　（3）$0.1^x=0.01$；

（4）$2^x=0.5$；　（5）$a^x=\frac{1}{a}$.

2. 把下列各题的对数式写成指数式：

（1）$x=\log_5 27$；　（2）$x=\log_8 7$；

（3）$x=\log_4 3$；　（4）$x=\log_7 \frac{1}{3}$.

3. 用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$，$\log_a(x\pm y)$ 的形式表示下列各式：

（1）$\log_a \frac{\sqrt{x}}{yz^2}$；　（2）$\log_a x\sqrt[4]{y^2z^3}$；

（3）$\log_a x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}z^{-\frac{2}{5}}$；　（4）$\log_a x^{-1}y^{-2}(x^2-y^2)$.

4. 计算：

（1）$\log_7 2+\log_7 \frac{1}{2}$；　（2）$\log_3 18-\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$；

（3）$2\log_5 10+\log_5 0.25$；　（4）$\lg\frac{1}{4}-\lg 25$.

5. 已知 $\lg 2\approx 0.3010$，$\lg 3\approx 0.4771$，计算（精确到 0.0001）：

（1）$\lg 30$；　（2）$\lg 0.6$；　（3）$\lg\sqrt{12}$；　（4）$\lg 150$.

6. 用计算器求下列各式的值（精确到 0.001）：

（1）$\lg 27$；　（2）$\ln 3.25$.

7. 用计算器求下列各式的值（精确到 0.0001）：

（1）$(\lg 25.6)(\ln 3.25)$；　（2）$\frac{\lg 5+\ln 3-\ln 2.7}{\lg 7}$.

阅读空间

对数的发明

“我要尽我的力量来免除计算中的困难和繁杂，由于讨厌它们，很多人吓得不敢学习数学了.”这是苏格兰数学家纳皮尔的话，他用自己一生的辛勤劳动，实现了他的这个诺言.

纳皮尔生于1550年，从小十分爱好数学，在掌握了前辈数学大师们关于代数学的理论知识后，就着手使乘除变得简单这一课题的研究. 经过几十年的苦心钻研，终于发明了对数，并将自己研究的成果写成专著——《奇妙的对数定律说明书》. 对数，作为一种计算方法，其功能就在于通过它，可以把乘除运算化为比较简单的加减运算.

纳皮尔的专著发表后，在数学界引起了强烈的反响，大数学家拉普拉斯称赞说：“对数的发明，将几个月的计算缩短成几天的工作，等于是把天文学家的寿命延长了一倍!”在伦敦牛津大学任教的数学和天文学教授布利格斯在日记中写道：“纳皮尔用他新颖而可叹的对数，使我能够有力地用脑和手来工作.”

布利格斯写信给纳皮尔，决定不辞劳苦，乘马车从伦敦奔向爱丁堡，去会见这位使他无比崇敬的天才的苏格兰人.

在漫长而崎岖的旅途中，布利洛斯在日记中写道：“这个苏格兰人的前额一定很高，因为他头脑发达，否则是难以做出如此惊人的发明的.”由于意外的事故，布利格斯在路上耽误了时间，正在爱丁堡焦急等待的纳皮尔终于失望了，他向一位朋友抱怨说：“唉！教授不会来了”.

正在这时，有人敲门了. 教授出现在他们面前. 他们在沉默中相互凝视了许久，后来布利格斯说道：

“我长途跋涉唯一的目的，就是想见见你本人，并想知道你是靠着怎样一种智慧的武器或天才的武器，才第一次想到这个对天文学十全十美的方法——对数的. 可是，我现在却更不明白，为什么没有人早些把它发现出来，自从你把它找出以后，它又好像是多么简单呀!”

相逢何必曾相识，共同的理想把纳皮尔和布利格斯紧紧地连在一起.

不幸的是，第二年纳皮尔就与世长辞了. 布利格斯继续工作，用毕生的精力致力于对数的研究与改进，终于使对数臻于完善.

纳皮尔和布利格斯不仅在数学的茫茫荒原上披荆斩棘，为后人开拓道路，而且他们诚挚的友谊、谦逊的品德、密切合作的风范，也为我们树立了榜样.

4.6 对数函数的图像与性质

1. 对数函数的定义

我们在指数函数中学过，细胞分裂时，细胞个数 y 是分裂次数 x 的函数，即 $y=2^x$. 反之，要求 1 个细胞经过几次分裂才能达到 1 万个细胞，那么分裂次数 x 就是细胞个数 y 的函数. 根据指数式与对数式的关系，这个函数可以写成

$$x=\log_2 y.$$

习惯上，我们用 x 表示自变量，y 表示函数，这个函数就是

$$y=\log_2 x.$$

一般地，形如 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），$x\in(0,\ +\infty)$ 的函数，叫做**对数函数**.

例如，$y=\log_2 x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$，$y=\lg x$ 和 $y=\ln x$ 等都是对数函数.

比较指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）与对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）可知，前者的定义域是 $(-\infty,\ +\infty)$，值域是 $(0,\ +\infty)$；而后者的定义域是 $(0,\ +\infty)$，值域是 $(-\infty,\ +\infty)$.

例1 求下列函数的定义域：

（1）$y=\log_a(2x-1)$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；　　（2）$y=\log_a x^2$.

分析：要使对数函数有意义，它的底数必须是不等于 1 的正数，真数必须是正数.

解：因为 $a>0$ 且 $a\neq 1$，

（1）$2x-1$ 必须大于 0，即 $2x-1>0$，得 $x>\dfrac{1}{2}$，所以，函数 $y=\log_a(2x-1)$ 的定义域是 $\left(\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$；

（2）x^2 必须大于 0，即 $x^2>0$，得 $x\neq 0$，所以，函数 $y=\log_a x^2$ 的定义域是 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$.

练习

1. 填空题：

（1）函数 $y=\log_4 x$ 是底数 $a=$______的______函数，定义域是__________，值域是__________；

（2）函数 $y=\log_{0.5}x$ 是底数 $a=$ ______ 的 ______ 函数，定义域是 ________，值域是________.

2. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\log_2(1-x)$；（2）$y=\log_{0.4}(2x+3)$.

2. 对数函数的图像和性质

作函数 $y=\log_2x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图像.

在定义域（0，$+\infty$）内列出 x，y 的对应值表.

$y=\log_2x$

x	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	…
$y=\log_2x$	…	-2	-1	0	1	2	…

$y=\log_{\frac{1}{2}}x$

x	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	…
$y=\log_{\frac{1}{2}}x$	…	2	1	0	-1	-2	…

在直角坐标系内描点连线，得到函数 $y=\log_2x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图像，如图 4－5 所示.

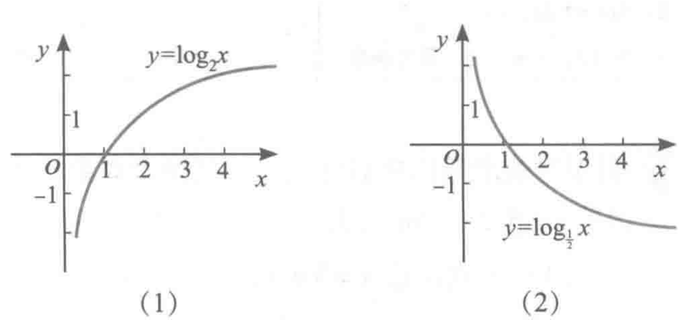


图 4－5

同样，在同一坐标系内作出 $y=\lg x$，$y=\log_{\frac{1}{10}}x$ 的图像，如图 4－6.

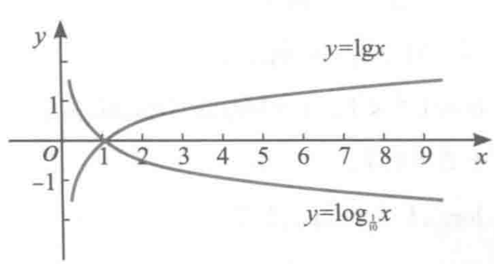
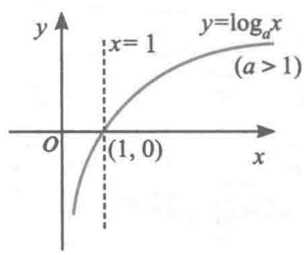
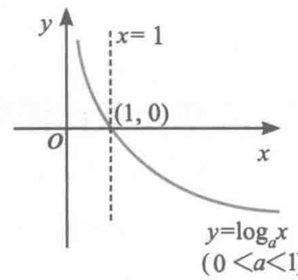


图 4－6

一般地，对数函数 $y=\log_ax$ 在底数 $a>1$ 及 $0<a<1$ 两种情况下的图像

形状及特征如下表所示：

函数 $y=\log_a x$ 的图像特征	
$a>1$	$0<a<1$
	
（1）图像都在 y 轴右侧	
（2）图像都经过点（1，0）	
（3）图像自左向右逐渐上升	图像自左向右逐渐下降

由对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的图像特征，我们可以得到对数函数的如下性质：

函数 $y=\log_a x$ 的性质	
$a>1$	$0<a<1$
（1）定义域是（0，$+\infty$）；值域是（$-\infty$，$+\infty$）	
（2）当 $x=1$ 时，$y=0$	
（3）在（0，$+\infty$）上 y 是增函数	在（0，$+\infty$）上 y 是减函数

例2 利用对数函数的单调性比较下列两个对数的大小：

（1）$\log_2 5.3$ 与 $\log_2 6.3$；　　　（2）$\log_{0.5}1.5$ 与 $\log_{0.5}1.7$.

解：（1）考察函数 $y=\log_2 x$，

∵　$2>1$，$y=\log_2 x$ 是增函数，

且　$5.3<6.3$，

∴　$\log_2 5.3<\log_2 6.3$.

（2）考察函数 $y=\log_{0.5}x$，

∵　$0<0.5<1$，$y=\log_{0.5}x$ 是减函数，

且　$1.5<1.7$，

∴　$\log_{0.5}1.5>\log_{0.5}1.7$.

* **例3** 解下列不等式：

（1）$\log_2 x<0$；　　　（2）$\log_{0.5}x>1$.

解：（1）将不等式 $\log_2 x<0$ 两边化为同底的对数，

即 $\log_2 x < \log_2 1$,

根据函数 $y=\log_2 x$ 的单调性及对数性质,

得不等式组 $\begin{cases} x<1, \\ x>0. \end{cases}$

解不等式组,得 $0<x<1$.

$\therefore$ 不等式的解集是 $\{x \mid 0<x<1\}$.

(2) 将不等式 $\log_{0.5} x > 1$ 两边化为同底的对数,

即 $\log_{0.5} x > \log_{0.5}\frac{1}{2}$,

根据函数 $y=\log_{0.5} x$ 的单调性及对数性质,

得不等式组 $\begin{cases} x<\frac{1}{2}, \\ x>0, \end{cases}$

解不等式组,得 $0<x<\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 不等式的解集是 $\left\{x \mid 0<x<\frac{1}{2}\right\}$.

练习

1. 比较下列两个对数的大小:

(1) $\log_3 0.4$ 与 $\log_3 0.5$;(2) $\log_{0.3} 2.1$ 与 $\log_{0.3} 1.2$.

***2.** 解下列不等式:

(1) $\log_2 x > 0$; (2) $\log_{0.5} x \leqslant 1$.

习题 六

1. 选择题:

(1) 下列函数中是偶函数的是 ( );

A. $y=\log_2 x$ B. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

C. $y=\log_2 x^2$ D. $y=\log_2^2 x$

(2) 下列对数中是正数的是 ( ).

A. $\log_{0.2} 3$ B. $\log_2 0.3$

C. $\log_{0.2} 0.3$ D. $\log_{\frac{1}{2}} \pi$

2. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\log_2(x-1)$；　（2）$y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$；

（3）$y=\log_4(x^2-x-2)$；　（4）$y=\dfrac{1}{\log_3 x}$.

3. 比较下列各题中两个对数的大小：

（1）$\log_3 1.1$ 与 $\log_3 1.2$；　（2）$\log_{0.3}2$ 与 $\log_{0.3}4$；

（3）$\log_{0.5}0.8$ 与 $\log_{0.5}0.9$；　（4）$\log_{0.3}0.3$ 与 $\log_{0.4}0.4$.

4. 把 x，y 的对应值填在下面空格内，并在同一坐标平面中作出函数 $y=\log_3 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 的图像.

x	…	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	…
$y=\log_3 x$	…								…
$y=\log_{\frac{1}{3}}x$	…								…

***5.** 解下列不等式：

（1）$\log_2(2x-1)>0$；　（2）$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>1$；

（3）$\log_3 x<\log_3 2$；　（4）$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}2$.

4.7 指数函数、对数函数的应用

指数函数、对数函数在许多实际问题中有重要应用,下面举一些例子来说明.

例1 截止到 1999 年底，我国人口约 13 亿. 如果今后能将人口年平均增长率控制在 1%，那么经过 20 年后，我国人口数最多为多少？（精确到亿）

解：设今后人口年平均增长率为 1%，经过 x 年后，我国人口数为 y 亿.

1999 年底，我国人口约为 13 亿；

经过 1 年（即 2000 年），人口数为

$$13 + 13 \times 1\% = 13(1 + 1\%)\ (亿)；$$

经过 2 年（即 2001 年），人口数为

$$13 \times (1 + 1\%) + 13 \times (1 + 1\%) \times 1\% = 13 \times (1 + 1\%)^2\ (亿)；$$

经过 3 年（即 2002 年），人口数为

$$13 \times (1 + 1\%)^2 + 13 \times (1 + 1\%)^2 \times 1\% = 13 \times (1 + 1\%)^3\ (亿)；$$

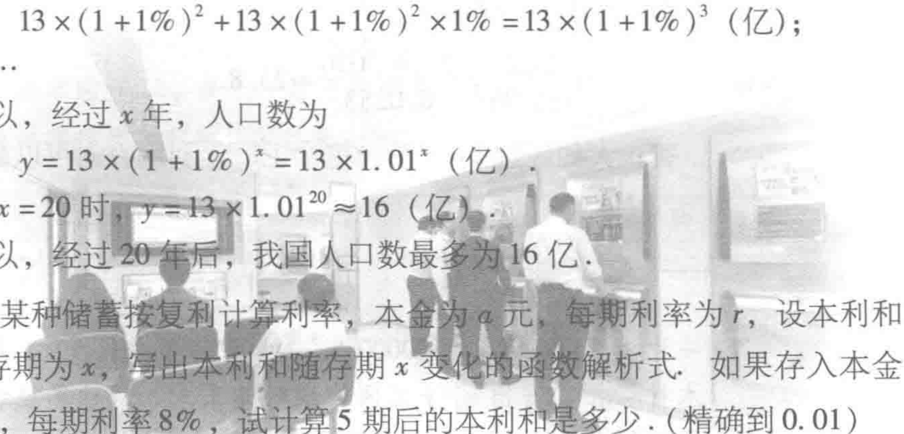
……

所以，经过 x 年，人口数为

$$y = 13 \times (1 + 1\%)^x = 13 \times 1.01^x\ (亿).$$

当 $x = 20$ 时，$y = 13 \times 1.01^{20} \approx 16$（亿）.

所以，经过 20 年后，我国人口数最多为 16 亿.



例2 若某种储蓄按复利计算利率，本金为 a 元，每期利率为 r，设本利和为 y，存期为 x，写出本利和随存期 x 变化的函数解析式. 如果存入本金 1000 元，每期利率 8%，试计算 5 期后的本利和是多少.（精确到 0.01）

解：已知本金为 a 元.

1 期后的本利和为 $y_1 = a + a \times r = a(1 + r)$；

2 期后的本利和为 $y_2 = a(1 + r) + a(1 + r)r = a(1 + r)^2$；

3 期后的本利和为 $y_3 = a(1 + r)^3$；

……

x 期后的本利和为 $y = a(1 + r)^x$.

将 $a = 1000$，$r = 8\%$，$x = 5$ 代入上式，得

$$y = 1000 \times (1 + 8\%)^5$$
$$= 1000 \times 1.08^5.$$

利用计算器算，得

$$y \approx 1469.33.$$

答：复利函数式为 $y = a(1 + r)^x$，5 期后的本利和约为 1469.33 元.

学习小贴示

在银行业务中，有两种计息方法，即单利和复利. 单利计息是指在储蓄过程中，只有本金生息，前一期利息在下一期中不生息；而复利计息则指本利生息，即把前一期的利息和本金加在一起算做本金，再计算下一期的利息.

说明：在实际问题中，常常遇到有关平均增

长率的问题，如果原来产值的基础数为 N，平均增长率为 p，则对于时间 x 的总产值或总产量 y，可以用下面的公式

$$y = N\ (1+p)^x$$

表示．今后遇到解决平均增长率的问题，都要用到这个函数式．

例3 某工厂今年年利润收入为 1000 万元，如果年利润收入平均增长率为 6%，那么经过几年后它的年利润收入可以翻两番？（精确到 0.1）

解：设经过 x 年后工厂年利润收入为 y，

则 $y = 1000(1+6\%)^x = 4000$，

$\therefore \quad 1.06^x = 4.$

两边取常用对数，得

$$\lg 1.06^x = \lg 4,$$

而 $x\lg 1.06 = 2\lg 2.$

$$\therefore \quad x = \frac{2\lg 2}{\lg 1.06} = \frac{2\times 0.3010}{0.0253} \approx 23.8.$$

答：大约经过 24 年后，这个工厂年利润收入可以翻两番．

练习

1. 一片树林中现有木材 30000 米^3，如果每年增长 5%，经过 x 年，树林中有木材 y 米^3，写出 x，y 之间的函数关系式．试计算经过多少年，木材可以增长到 40000 米^3.（结果保留一个有效数字）
2. 某工厂年产值为 a 万元，计划从今年起年产值平均增长率为 10%，写出年产值与年数变化的函数关系式，并求大约多少年后年产值可以翻两番.（已知 $\lg 2 \approx 0.3010$，$\lg 1.1 \approx 0.0414$）

习题 七

1. 一种产品的年产量原来是 a，在今后的 m 年内，计划使年产量平均每年比上一年增加$p\%$. 写出年产量随着年数变化的函数解析式．
2. 某城市现有人口 200 万，如果按人口的年自然增长率 1.6% 计算，10 年后这个城市的人口预计有多少万？(结果保留到小数点后面两位)
3. 一种产品原来成本为 1 万元，在今后几年内计划成本平均每年降低 6%，写出成本与年数的函数关系式，并求大约经过几年成本降为原来的一半．($\lg 9.4 \approx 0.9731$)
4. 一个细胞每分裂一次成 2 个，写出分裂后细胞个数与分裂次数的函数关系式，并求经过几次分裂后细胞个数是原来的 30 倍．

归纳与总结

1. 知识要点

（1）指数和对数

如果 $x^n=a$ $(n\in\mathbf{N}_+$，且 $n>1)$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根. 在此基础上，我们规定了分数指数幂的意义：

$$a^{\frac{m}{n}}=\_\_\_\_\quad (a>0,\ m,\ n\in\mathbf{N}_+,\ 且\ n>1),$$

$$a^{-\frac{m}{n}}=\_\_\_\_\quad (a>0,\ m,\ n\in\mathbf{N}_+,\ 且\ n>1).$$

如果 $a^b=N$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$，那么 b 叫做以 a 为底 N 的对数，记做______.

指数式与对数式的关系是

$$\_\_\_\_\_\_ \Leftrightarrow \_\_\_\_\_\_\quad (a>0\ 且\ a\neq1,\ N>0),$$

两个式子表示的 a，b，N 三个数之间的关系是一样的，并且可以互化.

指数运算性质和对数运算性质：

指数运算性质	对数运算性质
$a^m\cdot a^n=$____	$\log_a(MN)=$____
$(a^m)^n=$____	$\log_a\frac{M}{N}=$____
$(ab)^r=$____	$\log_a M^q=$____
$(a>0,\ b>0,\ m,\ n,\ r\in\mathbf{R})$	$(M>0,\ N>0,\ a>0$ 且 $a\neq1,\ q\in\mathbf{R})$

（2）幂函数、指数函数和对数函数

幂函数与指数函数容易混淆，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 中，底是____，指数是常数，而指数函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 中，底是常数，指数是____.

请同学们自己完成下表：

函数	指数函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$		对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$	
图像				
性质				

2. 重点与难点

本单元学习的重点是指数函数与对数函数的概念、图像及其单调性.

难点是分数指数幂的概念、对数的概念，以及指数函数、对数函数单调性的应用.

分数指数幂可以看做是根式的另外一种写法，因此应在理解根式的基础上掌握分数指数幂的概念.

对数式可以看做是指数式的另外一种写法，因此熟练掌握指数式与对数式的互化是理解对数概念的基础.

利用指数函数和对数函数的单调性，可以比较两个同底的幂或两个同底的对数的大小，关键是认清楚它们的底是大于1，还是小于1大于0，即确定它们是增函数还是减函数，从而确定要比较的两个数值的大小.

例1 求函数 $y=\dfrac{1}{\log_3(3x-2)}$ 的定义域.

分析：要使 $\dfrac{1}{\log_3(3x-2)}$ 有意义，就必须使分母不等于0，而且真数必须为正.

解：函数 $y=\dfrac{1}{\log_3(3x-2)}$ 的定义域必须满足不等式组：

$$\begin{cases}\log_3(3x-2)\neq 0,\\ 3x-2>0.\end{cases}$$

$\because\quad \log_3 1=0,$

$\therefore\quad \log_3(3x-2)\neq 0.$

也即 $\log_3(3x-2)\neq\log_3 1,$

$\therefore\quad 3x-2\neq 1,$

$\therefore\quad x\neq 1.$

由 $3x-2>0$，得

$$x>\frac{2}{3}.$$

$\therefore$ 所求函数的定义域是 $\left\{x \mid \dfrac{2}{3}<x<1\right\}\cup\{x\mid x>1\}$.

例2 比较大小：

(1) $a^{\frac{3}{2}}$ 与 $a^{\frac{4}{3}}$ $(a>0)$；　　(2) $\log_x 5$ 与 $\log_x 7$ $(x>0$ 且 $x\neq 1)$；

(3) $\log_2\dfrac{2}{3}$ 与 $\log_4\dfrac{4}{3}$.

分析：利用指数函数、对数函数的单调性比较大小.

解：(1) $\because\quad \dfrac{3}{2}>\dfrac{4}{3}$，$a>0$，

∴　当 $a>1$ 时，$a^{\frac{3}{2}}>a^{\frac{4}{3}}$；

当 $a=1$ 时，$a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{4}{3}}$；

当 $0<a<1$ 时，$a^{\frac{3}{2}}<a^{\frac{4}{3}}$.

（2）当 $0<x<1$ 时，

∵　$5<7$，

∴　$\log_x 5>\log_x 7$.

当 $x>1$ 时，

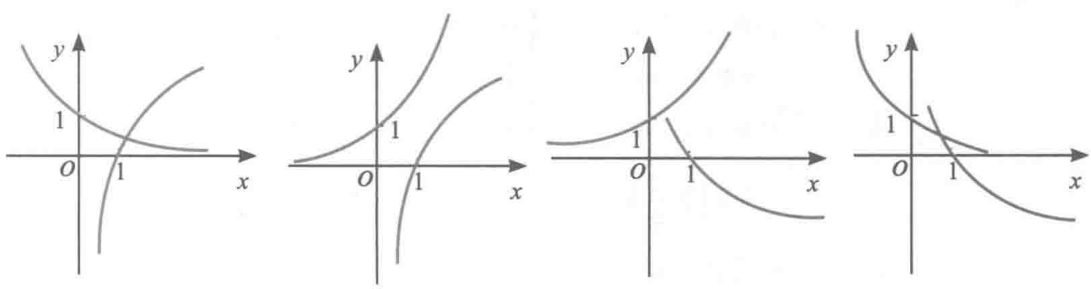
∵　$5<7$，

∴　$\log_x 5<\log_x 7$.

（3）∵　$\log_2 \frac{2}{3}<\log_2 1=0$，而 $\log_4 \frac{4}{3}>\log_4 1=0$，

∴　$\log_2 \frac{2}{3}<\log_4 \frac{4}{3}$.

例3 当 $a>1$ 时，在同一坐标系中，函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图像是（　　）.



A　　　　B　　　　C　　　　D

解：由 $a>1$ 知 $0<\frac{1}{a}<1$.

∴　$y=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 是减函数，应排除 B、C.

又∵　$y=\log_a x$（$a>1$）是增函数，应排除 C、D，

∴　应选 A.

综合练习 四

A 组

1. 填空题：

（1）$4^{-1}=$____，$4^{\frac{1}{2}}=$____，$4^{-\frac{1}{2}}=$____，$4^{0}=$____；

（2）$\left(\frac{9}{16}\right)^{-1}=$____，$\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}=$____，$\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}=$____，$\left(\frac{9}{16}\right)^{0}=$____；

（3）$0.25^{-1}=$____，$0.25^{\frac{1}{2}}=$____，$0.25^{-\frac{1}{2}}=$____，$0.25^{0}=$____；

（4）$2\sqrt{2}$化为指数形式是____；

（5）$25\sqrt{5}$化为指数形式是____；

（6）$\log_5\frac{1}{5}=$____，$\log_{\frac{1}{5}}5=$____；

（7）$10^{\lg 3}=$____，$4^{\log_2 5}=$____；

（8）$\log_6 3+\log_6 2=$____，$\lg 2+\lg 5=$____；

（9）函数 $y=2^{2x-1}$的定义域是____；

（10）函数 $y=\log_2(2x-1)$ 的定义域是____.

2. 求下列各式的值：

（1）$4^{-2}\times\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$；　　（2）$\lg 5-\lg 50$.

3. 求下列函数的定义域：

（1）$y=2^{\frac{1}{x}}$；　　（2）$y=\sqrt{2^{x}}$；

（3）$y=\log_2(x-x^2)$；　　（4）$y=\log_2(2^x-1)$.

4. 比较下列各题中两个数的大小：

（1）$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$与$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}$；　　（2）$(0.6)^{-2}$与$\left(1\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$；

（3）$\log_3 0.7$ 与 $\log_3 0.8$；　　（4）$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{7}$与 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{8}$.

***5.** 解下列不等式：

（1）$2^{1+3x}>\frac{1}{2}$；　　（2）$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5x}>9^{-3}$；

（3）$\lg(2x-5)>\lg(x-1)$；　　（4）$\log_{0.3}(x+2)>\log_{0.3}(3x+1)$.

6. 某厂有一台价值 100 万元的机器，该机器年折旧率为 10%，问再过 10 年，这台机器值多少万元？（精确到 0.01）

B　组

1. 求下列各式的值：

(1) $64^{\frac{2}{3}}\times 4^{-\frac{3}{2}}-2(\log_{12}2+\log_{12}6)$；

(2) $16^{\frac{3}{4}}\times\log_3\sqrt{3}+2\lg 2+\lg 25$.

2. 求下列各式中的 x：

(1) $x^{\frac{3}{4}}=2\sqrt{2}$；　(2) $4^x=\frac{1}{2}$；　(3) $\log_{\frac{1}{2}}x=3$；　(4) $\log_x 2=2$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)}$；　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)}}$；

(3) $y=\log_3 2x-4$；　(4) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}2x-1}$.

***4.** 把下列各数按从小到大的顺序用不等号连接起来：

(1) $2^{0.3}$，0.3^2，$\log_2 0.3$；

(2) $\log_{\frac{1}{2}}0.4$，$\lg^{0.4}$，$\log_2 0.4$.

阅读空间

揭开一幅算图的奥秘

某学校规定，取学生期中考试分数的40%与期末考试分数的60%的和作为这个学生的学期总成绩．

为了迅速算出学生的学期总成绩，一位同学创造了一幅奇妙的算图（图4－7）．

这张算图是这样应用的：学生的期中考试成绩用y轴上的点的纵坐标表示，期末考试成绩用直线AB上的点的纵坐标表示，学期总成绩用直线PQ上的点的纵坐标表示．

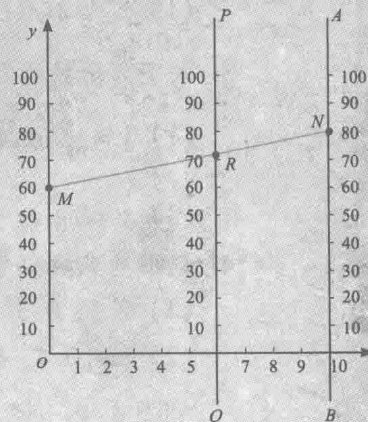


图4－7

如果一位学生的期中考试成绩是60分，我们就用y轴上的点M（0，60）表示；期末考试成绩是80分，我们就用直线AB上的点N（10，80）表示．联结MN，MN与直线PQ相交于点R，则点R的纵坐标“72”就是这位学生的学期总成绩．你来算一算，的确是这样吗？

如此简单实用的算图，它的奥秘在哪里呢？

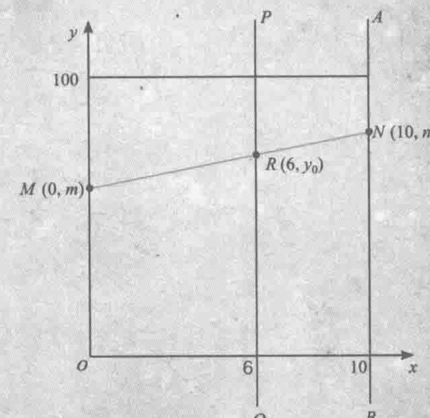


图4－8

事实上，算图上过M、N两点的直线可以看做是一个一次函数的图像（图4－8）．设这个一次函数的解析式为

$$y=kx+b\ (k\neq0).$$

如果某学生期中考试分数为m，期末考试分数为n，那么，学期总成绩A应为

$$A=m\times40\%+n\times60\%=0.4m+0.6n.$$

利用算图所得到的结果和它相同吗？

不难知道，M、N的坐标分别为（0，m）和（10，n），由于M、N都在函数$y=kx+b$（$k\neq0$）的图像上，所以有

$$\begin{cases}m=k\times0+b,\\n=k\times10+b.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} b = m, \\ k = \dfrac{n-m}{10}. \end{cases}$$

所以，函数的解析式为

$$y = \frac{n-m}{10}x + m.$$

由于所取的期末成绩和期中成绩的比是6:4，应取 $x = 6$，这时，点 R 的纵坐标 y_0 为

$$y_0 = \frac{n-m}{10} \times 6 + m = 0.4m + 0.6n.$$

不难看到，这个结果与前面用算术方法计算的结果是一致的，证明了利用算图方法的正确性．一次函数的知识帮助我们揭开了这张算图的奥秘！

同学们不妨想一想，这张算图在哪里还可以得到更实际的应用？

第五单元　三角函数

回顾与思考

在初中，我们学习了锐角三角函数的基本知识.

在现实世界中有很多周期现象，它们的运动和变化循环往复，周而复始，例如一些天体的运行，大海中的潮起潮落，某些物体的振动过程以及交流电的变化等，这些现象都可以用三角函数来刻画.

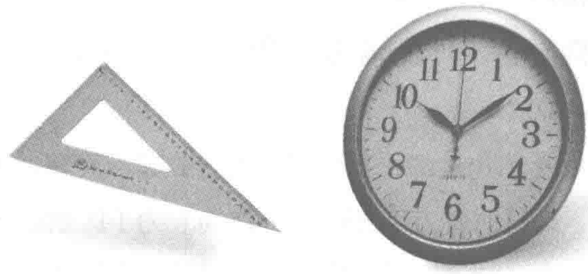
三角函数既是进一步学习数学的基础，又是解决生产实际和科学技术中某些问题的工具.

这一单元，我们将在对角的概念进行推广的基础上，讨论任意角的三角函数，学习一些三角关系式，研究三角函数的图像和性质，为同学们今后学习专业知识和掌握职业技能打下基础.

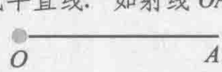
5.1 角的概念的推广

引例

在生活中，很多物体都给我们以角的印象，如三角板的三个角，钟表的时针与分针所构成的角等. 但是，我们注意到，钟表的时针与分针一直在不停地旋转着，它们所转过的角已远远超过 360°，这样的角该怎样描述呢？

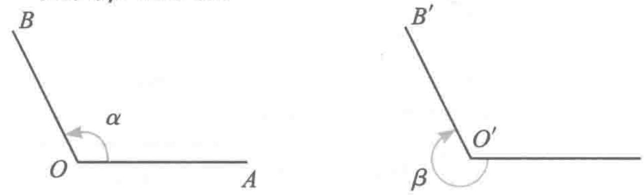


我们知道，在平面内，角可以看做是一条射线绕着它的端点旋转而成的图形. 旋转起始时的射线叫做**角的始边**，终止时的射线叫做**角的终边**，射线的端点叫做**角的顶点**.

> **工具箱**
>
> 直线上的一点和它一旁的部分所组成的图形称为射线或半直线. 如射线 OA.
>
> 
>

如图 5－1（1）中，OA 是角 α 的始边，OB 是角 α 的终边，O 是角 α 的顶点.

图 5－1（2）中，$O'A'$是角 β 的始边，$O'B'$是角 β 的终边，O'是角 β 的顶点.



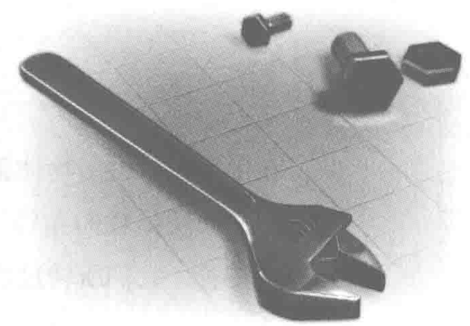
（1）　　　　（2）

图 5－1

角除了用常用字母 A、B、C 等表示外，也可以用字母 α、β、γ 等表示，特别是当角作为变量时，常用字母 x 表示.

在初中，我们学习过 0°到 360°的角，即如果 $\alpha = 90°$，那么 α 叫做直角；如果 $0° < \alpha < 90°$，那么 α 叫做锐角；如果 $90° < \alpha < 180°$，那么 α 叫做钝角；如果 $\alpha = 180°$，那么 α 叫做平角；如果 $\alpha = 360°$，那么 α 叫做周角.

在实际问题中，经常会遇到大于360°的角和按不同方向旋转所成的角. 例如我们拧紧一个螺帽，要把它按一个方向旋转，可能需要一周，两周，…，这样转过的角往往超过360°. 而当放松螺帽时，又要按与拧紧时相反的方向旋转，可能需要一周，两周，…. 因此，角的范围不只限于0°到360°.



既然角是由一条射线绕着它的端点旋转而成，旋转时就有两个相反的方向，即逆时针方向和顺时针方向. 为了区别因旋转方向不同而形成的角，我们规定：按逆时针方向旋转所得到的角为**正角**，如图5－1（1）中，α 为正角；而按顺时针方向旋转所得到的角为**负角**，如图5－1（2）中，β 为负角. 我们还规定：当一条射线没有作任何旋转时，也把它看成一个角，叫做**零角**. 这样，零角的始边和终边重合. 如果角 α 是零角，那么 $\alpha=0°$.

如图5－2所示，射线 OA 绕点 O 按逆时针方向旋转45°到 OB 的位置，所形成的角可记做 $\angle AOB=45°$；射线 OA 绕端点 O 按顺时针方向旋转30°到 OC 的位置所形成的角可记做 $\angle AOC=-30°$.

在画图时，我们常用带箭头的弧来表示旋转生成的角. 例如图5－3中，$\alpha=450°$，$\beta=-330°$.

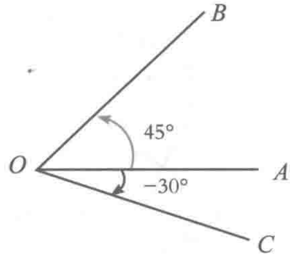


图5－2

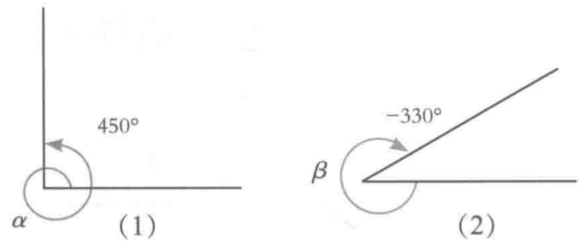


图5－3

至此，我们就把角的概念推广到任意大小的正角、负角和零角的范围.

为了讨论问题的方便，我们总是把任意大小的角放到平面直角坐标系内加以讨论，具体做法是：（1）使角的顶点和坐标原点重合；（2）使角的始边和 x 轴的非负半轴重合. 这时，角的终边落在第几象限，就说这个角是第几象限的角（有时也称这个角属于第几象限）；如果这个角的终边落

在坐标轴上，那么这个角就不属于任何一个象限.

试一试

请在平面直角坐标系中作出 $60°$，$150°$，$270°$，$-210°$，$-300°$的角，并分别说出它们各是第几象限角.

如果把 $\alpha=30°$按上述方法放到直角坐标系中去（图 5－4），α 的始边为 Ox，终边为 OP，很明显 α 是第一象限的角.

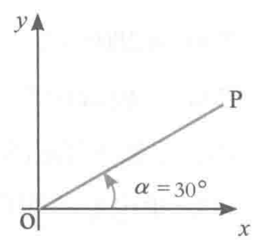


图 5－4

议一议

以 Ox 为始边，把 $30°$角的终边分别按照逆时针方向和顺时针方向旋转 2 周后，所得角的大小各是多少度？与 $\alpha=30°$有相同的始边和终边的角可以怎样表示呢？

这些角可以分别表示成

$30°+360°$，　$30°-360°$，

$30°+2\times360°$，　$30°-2\times360°$，

$30°+3\times360°$，　$30°-3\times360°$，

…

所有这些角可以表示成 $30°+k\cdot360°$（$k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq0$）. 如果把 α 本身也算在内，那么这些角可以表示成 $30°+k\cdot360°$（$k\in\mathbf{Z}$）.

这些有相同的始边和终边的角，叫做**终边相同的角**. 由上述问题的讨论可以知道，与角 α 终边相同的角有无数多个.

一般地，所有和角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可以表示成

$$\alpha+k\cdot360°\ (k\in\mathbf{Z}).$$

结合我们所学的集合知识，对于每一个任意大小的角 α，就确定了一个与 α 终边相同的角的集合，这个集合可以表示为

$$S=\{x\mid x=\alpha+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

反之，如果 $x=\alpha+k\cdot 360^\circ$（$k\in\mathbf{Z}$），那么 x 与角 α 就是终边相同的角，因此，它们或同属于某一个象限，或终边同在某一条坐标轴的半轴上.

例如，$750^\circ=30^\circ+2\times 360^\circ$，则 750° 与 30° 同属于第一象限；

$-450^\circ=270^\circ-2\times 360^\circ$，则 -450° 与 270° 同在 y 轴的负半轴上.

例1 在 $0^\circ\sim 360^\circ$ 之间*，找出与下列各角终边相同的角，并判定各角所在的象限：

（1）1000°；（2）-120°；（3）$410^\circ 30'$.

解：（1）$\because 1000^\circ=280^\circ+2\times 360^\circ$，

$\therefore 1000^\circ$ 角和 280° 角的终边相同.

又 280° 角属于第四象限，

$\therefore 1000^\circ$ 角也是第四象限角.

（2）$\because -120^\circ=240^\circ-360^\circ$，

$\therefore -120^\circ$ 角和 240° 角的终边相同.

又 240° 角属于第三象限，

$\therefore -120^\circ$ 角也是第三象限角.

（3）$\because 410^\circ 30'=50^\circ 30'+360^\circ$，

$\therefore 410^\circ 30'$ 角和 $50^\circ 30'$ 角的终边相同.

又 $50^\circ 30'$ 角属于第一象限，

$\therefore 410^\circ 30'$ 角也是第一象限角.

想一想 锐角是第几象限角？第一象限的角都是锐角吗？

例2 写出与下列各角终边相同的角的集合 S：

（1）45°；（2）-75°；（3）$-335^\circ 37'$.

解：（1）$S=\{x\mid x=45^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

（2）$S=\{x\mid x=-75^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

（3）$S=\{x\mid x=-335^\circ 37'+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

---

* 本书中，角 α 在 $0^\circ\sim 360^\circ$ 之间，是指 $0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ$。

*例3 写出终边在 y 轴上的角的集合.

解：在 $0°\sim360°$ 间终边在 y 轴上的角，一个是 $90°$角，另一个是 $270°$角（如图 5－5）.

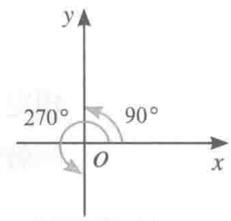


图 5－5

因此，终边在 y 轴上的所有的角是 $90°+k\cdot360°$ 和 $270°+k\cdot360°$（$k\in\mathbf{Z}$），注意到

$$90°+k\cdot360°=90°+2k\cdot180°, \quad (1)$$

$$270°+k\cdot360°=90°+180°+2k\cdot180°=90°+(2k+1)\cdot180°. \quad (2)$$

（1）式的右边是 $180°$的偶数倍加 $90°$，（2）式的右边是 $180°$的奇数倍加 $90°$，两式合并起来就是 $180°$的任意整数倍加 $90°$，即 $90°+n\cdot180°$（$n\in\mathbf{Z}$），所以，终边在 y 轴上的角的集合可写成

$$S=\{\beta\mid\beta=90°+n\cdot180°,\ n\in\mathbf{Z}\}.$$

想一想 终边在 x 轴上的角的集合怎样表示？

练习

1. 在直角坐标系中，以原点为顶点，x 轴的正半轴为始边，画出下列各角，并分别指出它们是第几象限角：

（1）$390°$；（2）$-60°$；（3）$-585°$.

2. 在 $0°\sim360°$之间，找出与下列各角终边相同的角，并分别指出它们是第几象限角：

（1）$480°$；（2）$-760°$；（3）$932°30'$.

3. 写出与下列各角终边相同的角的集合：

（1）$72°$；（2）$-40°$；（3）$202°39'$.

5.2 弧度制

初中阶段我们学过角的度量，具体做法是将一个周角分成 360 等分，规定其中的每一等分为 1 度的角，这种以“度”为单位来度量角的制度就叫做**角度制**. 在角度制下，1 周角 $=360°$，1 平角 $=180°$，1 直角 $=90°$.

> **学习小贴示**
>
> 1873 年 6 月 5 日，一位名叫汤姆逊（James Thomson）的数学教师创造性地使用了“弧度”一词，并一直沿用至今.

在数学和其他许多学科研究中常常应用到另一种度量角的制度——**弧度制**. 弧度制就是以“弧度”为单位来度量角的制度. 那么，弧度又是怎样的一种单位呢？

我们规定：**在一个圆中，长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角**，弧度记做 rad. 如图 5－6 中，弧 AB 的长等于圆的半径 r，那么弧 AB 所对的圆心角 $\angle AOB$ 就是 1 弧度的角. 又如图 5－7 中，弧 CD 的长 $l=1.5r$，那么，弧 CD 所对的圆心角 $\angle COD$ 就是 1.5 弧度的角.

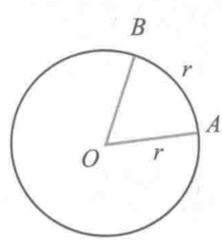


图 5－6

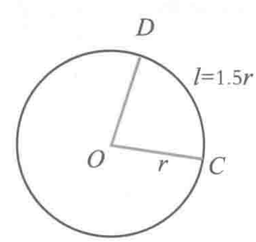


图 5－7

> **议一议**
>
> 在半径不同的两个圆中，长度分别等于它们半径的弧所对的圆心角相等吗？

建立了弧度制后，任何一个角都可以用弧度制和角度制来度量，同一个角的度数和弧度数是不同的（零角除外）.

下面我们来研究弧度和度之间的换算关系.

我们知道，一个周角等于 360°，一个周角所对的弧长 $l=2\pi r$（其中 r 是圆的半径），就是一个圆周长，它的弧度数是

$$\frac{l}{r}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi.$$

这就是说，一个周角等于 360°，用弧度来度量它，等于 2π rad，即 $360°=2\pi$ rad.

因此得到角度和弧度的换算公式：

$$180^\circ = \pi \mathrm{rad}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\mathrm{rad} \approx 0.01745\mathrm{rad}$$

$$1\mathrm{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ = 57^\circ 18'$$

例1 将下列各度化成弧度：

（1）60°；　　　　（2）$22^\circ 30'$.

解：（1）$60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180}\mathrm{rad} = \frac{\pi}{3}\mathrm{rad}$；

（2）$\because 22^\circ 30' = 22.5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$，

$\therefore 22^\circ 30' = \frac{45}{2} \times \frac{\pi}{180}\mathrm{rad} = \frac{\pi}{8}\mathrm{rad}$.

工具箱

在角度制中，度、分、秒是 60 进制的，即 $1^\circ = 60'$，$1' = 60''$.

例2 将 $\frac{2}{5}\pi$ 弧度化成度.

解：$\frac{2}{5}\pi\mathrm{rad} = \frac{2}{5} \times 180^\circ = 72^\circ$.

练一练

填写下列特殊角的度数和弧度数的对应表：

度	0°		45°	60°		180°	270°	
弧度		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{2}$			2π

由于角分正角、负角和零角，我们规定：正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为零. 总之，任意一个角的弧度数是一个实数. 于是，在弧度制下，角的集合和实数集 **R** 之间可以建立起这样的一种对应关系，即每一个角对应一个实数（即这个角的弧度数），不同的角对应不同的实数；反之，每一个实数对应一个角（即弧度数等于这个实数的角），不同的实数对应不同的角. 如图 5－8.

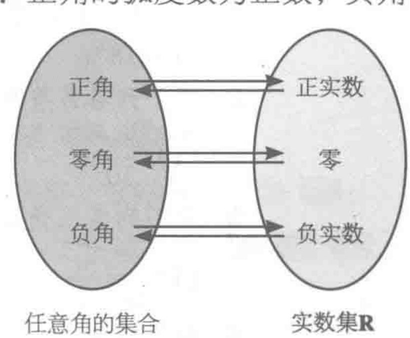


图 5－8

今后，如不产生混淆，用弧度做单位表示角的大小时，“弧度”两字

或“rad”可以省略不写. 如 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$，即表示 α 角是 $\frac{2\pi}{3}$ 弧度的角；又如 sin1 表示 1 弧度的角的正弦. 这时应注意 sin1 与 sin1°表示不相等的两个角的正弦值.

例3 计算 $\sin\frac{\pi}{6}$.

解：$\because \frac{\pi}{6}=30°$，

$\therefore \sin\frac{\pi}{6}=\sin 30°=\frac{1}{2}$.

练一练 计算：$\sin\frac{\pi}{4}$，$\sin\frac{\pi}{3}$.

说明：对于特殊角，以两种单位度量，同学们应该可以直接写出它们的各种三角函数值.

例4 将下列各角化成 $\alpha+k\cdot 2\pi$（$0\leqslant\alpha<2\pi$，$k\in\mathbf{Z}$）的形式：

（1）$\frac{27}{4}\pi$；（2）$-\frac{11\pi}{6}$；（3）1050°.

解：（1）$\frac{27}{4}\pi=\frac{3\pi}{4}+6\pi$（其中 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$，$k=3$）；

（2）$-\frac{11\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+(-2)\pi$（其中 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，$k=-1$）；

（3）$1050°=\frac{\pi}{180}\times 1050=\frac{35\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}+4\pi$（其中 $\alpha=\frac{11\pi}{6}$，$k=2$）.

练习

1.（口答）说出下列各度数分别对应的弧度数（用含 π 的式子表示）：

（1）18°；（2）15°；（3）105°.

2. 将下列各弧度换算成度：

（1）$\frac{3\pi}{10}$；（2）$-\frac{2\pi}{5}$；（3）$\frac{11\pi}{12}$.

3. 求下列各三角函数值：

（1）$\cos\frac{\pi}{4}$；（2）$\tan\frac{\pi}{3}$.

4. 将下列各角化成 $\alpha+k\cdot 2\pi$（$0\leqslant\alpha<2\pi$，$k\in\mathbf{Z}$）的形式：

（1）$\frac{29\pi}{3}$；（2）$-\frac{37\pi}{7}$；（3）$-1404°$.

根据弧度制的概念可知，如果在半径为 r 的圆中，长为 l 的圆弧所对的圆心角为 α，那么角 α 的弧度数的绝对值为

$$|\alpha|=\frac{l}{r}.$$

由此可得，在弧度制下的弧长公式是

$$l=|\alpha|\cdot r.$$

其中 r 表示圆的半径，$|\alpha|$ 表示圆心角的弧度数的绝对值，l 是该圆心角所对的圆弧的长度. 这个弧长公式要比在角度制下的弧长公式 $l=\frac{n\pi r}{180}$（其中 n 表示圆心角 α 度数的绝对值）简单.

例5 如图 5－9，弧 AB 表示花坛的一段圆弧形的栅栏，它的半径为 $r=6.5$ 米，圆心角为 72°，求这段栅栏（弧 AB）的长度（精确到 0.01 米）.

解：$\because\ l=|\alpha|\cdot r$，

又　$r=6.5$，$\alpha=\frac{\pi}{180}\times 72=\frac{2\pi}{5}$，

$\therefore\quad l=6.5\times\frac{2\pi}{5}\approx 8.17$（米）.

答：这段栅栏（即弧 AB）的长约为 8.17 米.

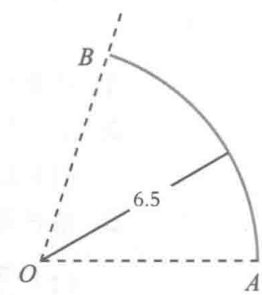


图 5－9

例6 按照下列要求，将 $67°30'$ 化成弧度：

（1）精确值；

（2）精确到 0.001 的近似值.

解：（1）因为 $67°30'=\frac{135°}{2}$，所以

$$67°30'=\frac{\pi}{180}\times\frac{135}{2}=\frac{3\pi}{8}.$$

（2）利用计算器：

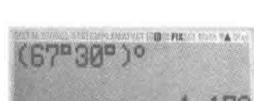
第一步：将计算器先设置为线性状态，按键 SHIFT MODE 2；

第二步：将单位设置为“弧度”，即 Rad 状态，按键 SHIFT MODE 4；

第三步：将结果的精确度设置为小数点后 3 位，按键 SHIFT MODE 6 3.

依次按键：(67 °′″ 30 °′″) SHIFT Ans 1 =，

计算器显示



例7 将3.14换算成角度.（精确到0.001）

解：利用计算器，首先将单位设置为“度”，即Deg状态，按键 SHIFT MODE 3；

依次按键：3.14 SHIFT Ans 2 =，

计算器显示

想一想 你能总结一下利用计算器把角度换算成弧度（或把弧度换算成角度）的步骤吗？

练习

1. 计算当半径为25cm，圆心角为120°时所对的圆弧的长.
2. 用计算器将下列各度化成弧度：（精确到0.001）
   （1）$32°11'$；（2）$25.5°$；（3）$-82.7°$.
3. 用计算器将下列各弧度化成度：（精确到0.001）
   （1）$\frac{\pi}{12}$；（2）$-\frac{4\pi}{3}$；（3）1.4.

习题 一

1. 在0°~360°间找出与下列各角终边相同的角，并判定它们各是第几象限的角.
   （1）$520°$；（2）$1330°$；（3）$-330°45'$.
2. 写出与下列各角终边相同的角的集合：
   （1）$81°$；（2）$-280°$；（3）$-415°27'$.
3. 将下列各度化成弧度：（用含π的式子表示）
   （1）$12°$；（2）$390°$；（3）$-22.5°$.
4. 将下列各弧度化成度：
   （1）$\frac{5\pi}{6}$；（2）$-\frac{7\pi}{8}$；（3）$-\frac{\pi}{12}$.
5. 利用计算器将下列角度与弧度进行互化：（精确到0.01）
   （1）$260°43'$；（2）$\left(-\frac{23\pi}{7}\right)$；（3）$410°15'$；

(4) $\frac{11\pi}{3}$;　　(5) 4.5;　　(6) (-6.7).

6. 将下列各角化成 $\alpha+2k\pi$ ($0\leqslant\alpha<2\pi$; $k\in\mathbf{Z}$) 的形式：

(1) $\frac{40\pi}{9}$;　(2) $\frac{43\pi}{15}$;　(3) 2010°;　(4) 1395°.

***7.** (1) 如果角 α 的终边过点 $P(-10, 3)$，则角 α 是第______象限的角；

(2) 如果角 α 是第二象限的角，且角 α 的终边过点 $P(m, 5)$，则实数 m 的取值范围是________.

***8.** (1) 已知圆的半径为 R，弧长为 $\frac{3\pi}{4}R$ 的圆弧所对的圆心角等于多少度？

(2) 已知圆的半径为 R，圆心角为 135°所对的圆弧长等于多少？

(3) 圆弧长为 $\frac{3\pi}{4}a$ ($a>0$)，圆心角为 $\frac{\pi}{2}$，这个圆的半径等于多少？

阅读空间

弧度制的由来

18 世纪以前，人们一直是用线段的长来定义三角函数的. 瑞士数学家欧拉（Eulero, Leonhardo, 1707.4.15 – 1783.9.18）在他于 1748 年出版的一部划时代的著作《无穷小分析引论》中，提出三角函数是对应的三角函数线与圆半径的比值，并令圆的半径为 1，使得对三角函数的研究大为简化. 这是欧拉在数学史上的重要功绩之一.

其次，欧拉在上述著作的第八章中提出了弧度制的思想，他认为，如果把半径作为 1 个单位长度，那么半圆的长就是 π，所对圆心角的正弦是 0，即 $\sin\pi=0$. 同理，圆的$\frac{1}{4}$的长是$\frac{\pi}{2}$，所对圆心角的正弦是 1，可记做 $\sin\frac{\pi}{2}=1$. 这一思想将线段与弧的度量单位统一起来，大大简化了某些三角公式及计算.

1873 年 6 月 5 日，数学教师汤姆逊（James Thomson）在北爱尔兰首府贝尔法斯特女王学院的数学考试题目中创造性地使用了“弧度”一词. 当时，他将“半径”（radius）的前四个字母与“角”（angle）的前两个字母和在一起，构成 radian，并被人们广泛接受和引用. 我国学者曾把 radian 译成“弪”（由“弧”与“径”两字的一部分拼成）. 中华人民共和国成立以来，中学数学教科书中都把 radian 译成“弧度”.

1881 年，学者哈尔斯特（G. B. Halsted）用希腊字母 ρ 表示弧度的单位，例如用$\frac{3}{5}\pi\rho$ 表示$\frac{3}{5}\pi$ 弧度. 1907 年，学者包尔（G. N. Bauer）用 r 表示；1909 年，学者霍尔（A. G. Hall）等又用 R 来表示，例如将$\frac{\pi}{4}$弧度写成$\frac{\pi}{4}^R$. 现在人们习惯把弧度的单位省略.

值得指出的是，1735 年，欧拉右眼失明，《无穷小分析引论》这部著作正是出版于他失明之后. 他的著作，在样式、范围和记号方面堪称典范，因此被许多大学作为教科书采用. 1766 年，他回到圣彼得堡研究院后不久，又转为双目失明. 但是他以惊人的毅力，在圣彼得堡又用口述方式工作了近 17 年，直到 1783 年去世. 他一生发表过 530 部（篇）著作和论文；还留下大量手稿. 此外，他扶植后学，关心教育，其高尚的品德赢得了后人的广泛尊敬.

5.3 任意角的正弦函数、余弦函数和正切函数

1. 任意角的三角函数的定义

在初中我们学过锐角的三角函数值，即在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$$\sin A=\frac{对边}{斜边}=\frac{BC}{AB},$$

$$\cos A=\frac{邻边}{斜边}=\frac{AC}{AB},$$

$$\tan A=\frac{对边}{邻边}=\frac{BC}{AC}.$$

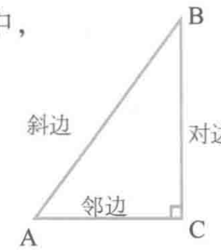


图 5 - 10

那么，对于任意角 α，我们又该如何确定其三角函数值呢？下面我们就来研究这个问题.

如图 5 - 11，将任意角 α 放在直角坐标系中，使角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴非负半轴重合，并设 α 终边上的任意一点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，则它与原点的距离为 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ $(r>0)$，我们定义角 α 的三角函数如下：

角 α 的正弦　$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$,

角 α 的余弦　$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$,

角 α 的正切　$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$.

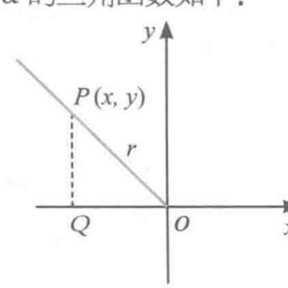


图 5 - 11

其中，对于 $\tan\alpha$，x 不能为零，即点 P 的横坐标不能为零，角 α 的终边不能在 y 轴上，所以 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

对于每一个确定的角 α，都分别有唯一确定的正弦值、余弦值、正切值与之对应，所以这三个对应法则都是以角 α 为自变量的函数，分别叫做角 α 的**正弦函数、余弦函数和正切函数**，我们将它们统称为**三角函数**.

各三角函数的定义域，如下表所示：

三角函数	定　义　域
$\sin\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha\in\mathbf{R}\}$
$\cos\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha\in\mathbf{R}\}$
$\tan\alpha$	$\{\alpha\in\mathbf{R} \mid \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$

例1 如图5－12，已知角 α 的终边过点 $P(-2, 3)$，求 α 的三个三角函数值.

解：$\because x=-2,\ y=3,$

$$\therefore r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13},$$

$$\therefore \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-2}{\sqrt{13}}=-\frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}.$$

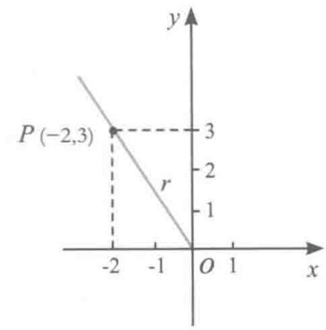


图 5－12

做一做

根据下列条件，分别求角 α 的三个三角函数值，并回答第（4）个问题：

（1）角 α 的终边上有一点 $P_1(-3, -4)$；

（2）角 α 的终边上有一点 $P_2(-6, -8)$；

（3）角 α 的终边上有一点 $P_3(-9, -12)$；

（4）一个角的三角函数值与这个角终边上的点的位置有关吗？

根据三角函数的定义可知，终边相同的角的同一三角函数值相等. 即对任意角 α（其中 α 属于相应的函数的定义域）有下列一组公式——**公式一**：

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$$

$$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$$

$$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

其中 $k\in\mathbf{Z}$

利用公式一，可以把求任意角的三角函数转化为求 0 到 2π $(0°\sim360°)$ 角的三角函数.

例2 求下列三角函数值：

（1）$\sin\dfrac{9\pi}{4}$；　　（2）$\cos\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)$；　　（3）$\tan\left(-\dfrac{23\pi}{3}\right)$.

解：（1）$\sin\dfrac{9\pi}{4}=\sin\left(2\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

（2）$\cos\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)=\cos\left(-2\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

(3) $\tan\left(-\frac{23\pi}{3}\right)=\tan\left(-8\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

练习

1. 已知角 α 的终边分别经过下列各点，试求 α 的三个三角函数值：

(1) $P(1, 1)$；　　(2) $P(-1, \sqrt{3})$；

(3) $P(-5, -12)$；　　(4) $P(4, -3)$.

2. 求下列三角函数值：

(1) $\sin(-1050°)$；　　(2) $\cos\frac{19\pi}{3}$；　　(3) $\tan\left(-\frac{31\pi}{4}\right)$.

***3.** 已知角 α 是第二象限的角，P 是角 α 终边上一点，点 P 的纵坐标 $y=2$，P 到原点的距离为 $\sqrt{5}$，求 α 的三个三角函数值.

2. 任意角的三角函数值的符号

在任意角的三角函数的定义中，我们知道 $r>0$. 因此，$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$ 的正负分别由 y、x 以及 $x\cdot y$ 的正负来确定.

当 α 的终边在第一、二象限或 α 的终边在 y 轴的正半轴上时，$y>0$，$\sin\alpha$ 为正；当 α 的终边在第三、四象限或 α 的终边在 y 轴的负半轴上时，$y<0$，$\sin\alpha$ 为负.

当 α 的终边在第一、四象限或 α 的终边在 x 轴的正半轴上时，$x>0$，$\cos\alpha$ 为正；当 α 的终边在第二、三象限或 α 的终边在 x 轴的负半轴上时，$x<0$，$\cos\alpha$ 为负.

当 α 的终边在第一、三象限时，$\frac{x}{y}>0$，$\tan\alpha$ 为正；当 α 的终边在第二、四象限时，$\frac{x}{y}<0$，$\tan\alpha$ 为负.

练一练

在下列坐标系中填写三角函数值在每个象限内的符号（图 5－13）：

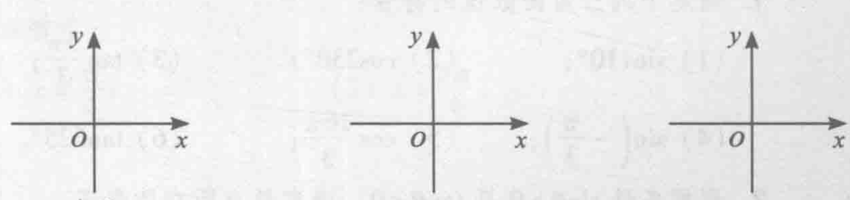


图 5－13

例3 确定下列各三角函数值的符号：

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$；　　(2) $\tan\frac{11\pi}{3}$；

(3) $\cos250°$；　　(4) $\sin(-600°)$.

分析：要确定角 α 的某个三角函数值的符号，首先要确定 α 是第几象限的角，然后再根据该三角函数在这个象限内所取的符号来确定.

解：(1) $\because -\frac{\pi}{4}$是第四象限角，$\therefore \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)<0$；

(2) $\because \frac{11\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+4\pi$，$\therefore \frac{11\pi}{3}$是第四象限角，$\therefore \tan\frac{11\pi}{3}<0$；

(3) $\because 250°$是第三象限角，$\therefore \cos250°<0$；

(4) $\because -600°=120°-2\times360°$，$\therefore -600°$是第二象限角，

$\therefore \sin(-600°)>0$.

例4 根据条件 $\cos\theta<0$ 且 $\tan\theta>0$，确定角 θ 所在的象限.

解：$\because \cos\theta<0$，

$\therefore \theta$ 可能在第二、三象限或其终边在 x 轴的负半轴上.

又$\because \tan\theta>0$，

$\therefore \theta$ 可能在第一、三象限.

$\therefore$ 满足条件 $\cos\theta<0$ 且 $\tan\theta>0$ 的 θ 角在第三象限.

说明：这里的角 θ 既要满足 $\cos\theta<0$，又要满足 $\tan\theta>0$，所以应取满足上述两个条件的角的交集.

想一想

设 A 是 $\triangle ABC$ 的一个内角，在 $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ 中，哪几个可能取得负值？

练习

1. 确定下列三角函数值的符号：

(1) $\sin110°$；　　(2) $\cos230°$；　　(3) $\tan\frac{5\pi}{3}$；

(4) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$；　　(5) $\cos\frac{16\pi}{3}$；　　(6) $\tan525°$.

2. 根据条件 $\sin\theta>0$ 且 $\tan\theta<0$，确定角 θ 所在的象限.

3. 0，$\frac{\pi}{2}$，π 和 $\frac{3\pi}{2}$ 角的三角函数值

当 $\alpha=0$ 时，α 的终边与 x 轴的正半轴重合，所以 α 终边上的任一点 P 的坐标满足 $x>0$，$y=0$，因此 $r=\sqrt{x^2+y^2}=x$，则有

$$\sin 0=\frac{y}{r}=0;\ \cos 0=\frac{x}{r}=\frac{r}{r}=1;\ \tan 0=\frac{y}{x}=\frac{0}{x}=0.$$

试一试

在下表中写出 $\frac{\pi}{2}$，π 和 $\frac{3\pi}{2}$ 角的各个三角函数值：

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0			
$\cos\alpha$	1			
$\tan\alpha$	0			

例5 化简 $a^2\sin\frac{\pi}{2}-2ab\cdot\cos\pi-b^2\sin\frac{3\pi}{2}+a\cdot\tan 0-b\cdot\tan\pi$.

解：原式 $=a^2\times 1-2ab\times(-1)-b^2\times(-1)+a\times 0-b\times 0$

$$=a^2+2ab+b^2$$

$$=(a+b)^2.$$

练习

1. 计算下列各式：

（1）$\sin\pi+\cos\pi+\tan\pi$；

（2）$2\sin\frac{\pi}{2}-3\cos 0+4\sin\frac{3\pi}{2}+7\cos\pi$；

（3）$a\sin 0^\circ+b\cos 90^\circ+c\tan 180^\circ$.

2. 根据下列条件，求 $f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-4\cos 2x+3\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的函数值：

（1）$x=\frac{\pi}{4}$；　　　　（2）$x=\frac{3\pi}{4}$.

习题 二

1. 确定下列三角函数值的符号：

（1）$\sin 130°$；（2）$\cos 200°$；（3）$\tan\frac{7\pi}{3}$；

（4）$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$；（5）$\cos\frac{11\pi}{4}$；（6）$\tan 590°$.

2. 已知角 α 的终边分别经过下列各点，求 α 的三个三角函数值：

（1）$P(-1, -2)$；（2）$Q(1, -\sqrt{3})$；（3）$M(-5, 12)$.

3. 计算：

（1）$\sin 90° - \cos 180° + \sin 270° - \cos 0°$；

（2）$4\cos\frac{\pi}{2} - 3\sin\frac{3\pi}{2} - 5\cos\pi + 3\sin 0$.

4. 填空：

（1）如果 $\sin\alpha > 0$，$\cos\alpha < 0$，那么 α 是第______象限的角；

（2）如果 $\cos\alpha > 0$，$\sin\alpha < 0$，那么 α 是第______象限的角；

（3）如果 $\tan\alpha > 0$，$\cos\alpha < 0$，那么 α 是第______象限的角；

（4）如果 $\sin\alpha > 0$，$\tan\alpha < 0$，那么 α 是第______象限的角.

5. 已知 $P(-3, 4)$ 是角 α 终边上的一点，求 $\sin\alpha + \cos\alpha + \tan\alpha$ 的值.

***6.** 根据下列条件，确定角 θ 是第几象限的角：

（1）$\cos\theta$ 与 $\tan\theta$ 异号；（2）$\cos\theta$ 与 $\tan\theta$ 同号；

（3）$\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 异号；（4）$\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 同号.

5.4 利用计算器求三角函数值

利用函数型计算器可以方便、准确、快速地求出任意角的三角函数值. 但是，在利用计算器计算时，一定要注意：如果求以“度”为单位的三角函数值，应将计算器置于 Deg（以度为单位的计算）状态；如果求以“弧度”为单位的三角函数值，应将计算器置于 Rad（以弧度为单位的计算）状态.

下面举例说明.

例1 利用计算器求下列三角函数值：（精确到 0.01）

（1）$\sin 435°$；　　（2）$\cos 67°43'35''$；　　（3）$\tan(-382°)$.

解：第一步：将计算器设置于 Deg（以度为单位的计算）状态，按键 SHIFT MODE 3；

第二步：将计算结果的精确度设置为小数点后 2 位，按键 SHIFT MODE 6 2.

（1）依次按键：sin 435) =，

计算器显示

所以　$\sin 435° \approx 0.97$；

（2）依次按键：cos 67 °′″ 43 °′″ 35 °′″) =，

计算器显示

所以　$\cos 63°43'35'' \approx 0.38$；

（3）依次按键：tan (−) 382) =，

计算器显示

所以　$\tan(-382°) \approx -0.40$.

例2 利用计算器求下列三角函数值：（精确到0.01）

（1）$\sin\left(-\dfrac{14\pi}{9}\right)$；　　（2）$\cos\left(-\dfrac{29\pi}{7}\right)$；　　（3）$\tan\dfrac{23\pi}{3}$.

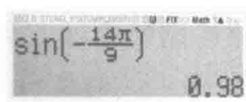
解：第一步：将计算器设置于Rad（以弧度为单位的计算）状态，按键 SHIFT MODE 4；

第二步：将输入格式设置为数学格式，即Math状态，按键 SHIFT MODE 1；

第三步：将计算结果的精确度设置为小数点后2位，按键 SHIFT MODE 6 2.

（1）依次按键：sin (−) ▭ 14 SHIFT ×10^x ▼ 9 ▶) =，

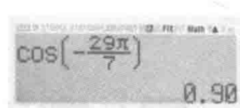
计算器显示



所以　$\sin\left(-\dfrac{14\pi}{9}\right)\approx 0.98$；

（2）依次按键：cos (−) ▭ 29 SHIFT ×10^x ▼ 7 ▶) =，

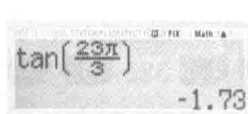
计算器显示



所以　$\cos\left(-\dfrac{29\pi}{7}\right)\approx 0.90$；

（3）依次按键：tan ▭ 23 SHIFT ×10^x ▼ 3 ▶) = S⇔D，

计算器显示



所以　$\tan\dfrac{23\pi}{3}\approx -1.73$.

练习

利用计算器求下列三角函数值：(精确到0.01)

(1) $\sin 280°33'$；　(2) $\sin(-356°)$；　(3) $\cos 442°10'$；

(4) $\tan(-395°27')$；　(5) $\sin 3.8$；　(6) $\cos(-7.9)$；

(7) $\tan\frac{11\pi}{6}$；　(8) $\sin\left(-\frac{25\pi}{8}\right)$.

习题 三

用计算器求下列三角函数值：(精确到0.0001)

(1) $\sin(-662°18')$；　(2) $\cos\frac{13\pi}{5}$；　(3) $\tan(-1000°52')$；

(4) $\tan 502°23'$；　(5) $\sin(-2.1)$；　(6) $\cos 10$；

(7) $\tan(-\frac{13\pi}{5})$；　(8) $\sin\frac{23\pi}{7}$.

5.5 同角三角函数基本关系式

根据三角函数的定义，我们可以得到下列同角三角函数的基本关系式：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

试一试　在直角坐标系中，我们把圆心在原点，以单位长度为半径的圆叫做单位圆（如图5-14）．你能在单位圆中根据三角函数的定义，推导出上述关系式吗？

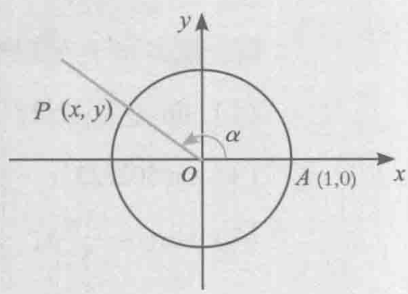


图5-14

上述关系式是恒等式，即当 α 取使关系式两边都有意义的任意值时，关系式两边的值相等．

想一想　关系式 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 成立的条件是什么？

例1　已知 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，且 α 是第二象限的角，求角 α 的余弦和正切的值．

分析： 已知条件中给出了 $\sin\alpha$ 的值，由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可求得 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$，但 α 是第二象限的角，所以根号前的符号应取负号．

解： $\because$ α 是第二象限的角，$\therefore\ \cos\alpha<0$，

$$\therefore\ \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13},$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}.$$

议一议

已知 $\sin\alpha$（或 $\cos\alpha$），运用关系式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，求 $\cos\alpha$（或 $\sin\alpha$）时，根号前的符号应怎样确定？

例2 已知 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$，且 α 是第二象限的角，求角 α 的正弦和余弦的值.

分析：我们把 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 看做是两个未知数，这样只要列出关于 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的方程组，就可以求出 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$.

解：由题意和三角函数的基本关系式，可列方程组

$$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, & (1)\\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{3}. & (2)\end{cases}$$

由（2）得 $\sin\alpha=-\dfrac{4}{3}\cos\alpha$，并代入（1），得

$$\cos^2\alpha=\frac{9}{25}.$$

$\because$ α 是第二象限的角，

$\therefore$ $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{4}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}.$$

例3 化简：

（1）$\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\tan\alpha-1}$；　　（2）$\tan\alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha}$（$\alpha$ 是第二象限的角）.

解：（1）$\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\tan\alpha-1}=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1}=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\cos\alpha$；

（2）$\tan\alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\tan\alpha\cdot\sqrt{\cos^2\alpha}=\tan\alpha\cdot|\cos\alpha|$，

$\because$ α 是第二象限的角，$\therefore$ $\cos\alpha<0$，

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot(-\cos\alpha)=-\sin\alpha$.

练习

1. 判断下列各题的正误：

（1）$\because\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\therefore\ \sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1$；（　　）

（2）$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$；（　　）

（3）已知 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$. ∵ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，∴ $\sin\alpha=4$，$\cos\alpha=3$.（　　）

2. 已知 $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$，且 α 是第三象限的角，求角 α 的余弦和正切的值.

3. 请同学们模仿例 2 完成下面的题目：

已知 $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 α 是第四象限的角，求角 α 的正弦和余弦的值.

解：由题意，可列方程组

$$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, & (1)\\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{3}}{3}. & (2)\end{cases}$$

由（2）得 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha$，并代入（1），得

$$\cos^2\alpha=\frac{3}{4}.$$

∵ ________，① ∴ $\cos\alpha=$ ________，②

$\sin\alpha=$ ________③ $=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times$ ______④ $=$ ______⑤.

4. 化简：

（1）$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$；（2）$(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$；（3）$\tan100°\cdot\sqrt{1-\cos^2 100°}$.

习题 四

1. 已知 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$，且 α 是第三象限的角，求 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

2. 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$，且 α 是第四象限的角，求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

3. 已知 $\tan\alpha=2$，且 α 是第一象限的角，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值.

4. 已知 $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 α 是第二象限的角，求 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

5. 已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，求 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

6. 已知 $\tan\alpha=2$，求下列各式的值：

（1）$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$；　（2）$\frac{2\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}$；　（3）$\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

7. 化简：

（1）$\frac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin^2\alpha}$；　（2）$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$（$\alpha$ 是第四象限的角）；

（3）$\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}-4\tan^2\alpha$.

5.6 诱导公式

由三角函数的定义我们知道，终边相同的角 $2k\pi+\alpha$（$k\in\mathbf{Z}$）和 α 的同一三角函数的值相等（公式一）．这样，求一个角的三角函数值便可以转化为求 $0\sim2\pi$ 的角的三角函数值．那么角 $-\alpha$，$\pi\pm\alpha$ 的三角函数是否能转化为 α 的三角函数呢？

1. $-\alpha$ 的三角函数

试一试　在直角坐标系中画出 $30°$ 与 $-30°$ 角、$135°$ 与 $-135°$ 角，并观察这两对角有什么特点．

如图 5－15，在直角坐标系中作单位圆，将任意角 α 和 $-\alpha$ 放入其中，它们的顶点为原点，始边为 Ox，由于它们绕原点旋转的方向相反而旋转的数量相同，因此它们的终边关于 x 轴对称．

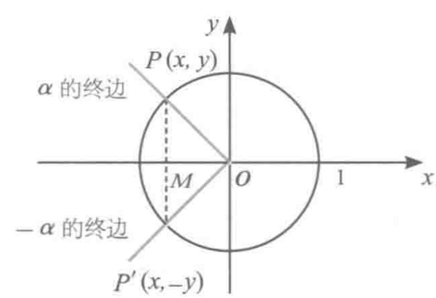


图 5－15

想一想　角 $-\alpha$ 与角 α 的终边与单位圆的交点的坐标有什么关系？

如果 α 的终边与单位圆的交点为 P（x，y），那么 $-\alpha$ 的终边与单位圆的交点为 P'（x，$-y$）．

又因为单位圆的半径 $r=1$，所以

$$\sin\alpha=y,\qquad \cos\alpha=x.$$

而　$\sin(-\alpha)=-y$，$\cos(-\alpha)=x$，

因此，　$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

利用同角三角函数间的关系，可以推出

$$\tan(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha.$$

由此得到一组公式——**公式二**：

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

这样，我们可以把求任意负角的三角函数值转化为求任意正角的三角函数值.

例1 求下列三角函数值：

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$；　(2) $\cos(-45°)$；　(3) $\tan\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$.

解：(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$；

(2) $\cos(-45°)=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(3) $\tan\left(-\frac{13\pi}{6}\right)=-\tan\frac{13\pi}{6}=-\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例2 计算：

$$\frac{\sin(-390°)\cdot\cos(-50°)}{\cos310°\cdot\tan(-780°)}.$$

解：原式 $=\frac{-\sin390°\cdot\cos50°}{\cos310°\cdot(-\tan780°)}$

$$=\frac{-\sin(360°+30°)\cdot\cos50°}{\cos[360°+(-50°)]\cdot[-\tan(2\times360°+60°)]}$$

$$=\frac{-\sin30°\cdot\cos50°}{\cos(-50°)\cdot(-\tan60°)}$$

$$=\frac{-\sin30°\cdot\cos50°}{-\cos50°\cdot\tan60°}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

例3 化简：

$$\frac{\cos(\alpha+2\pi)\cdot\sin(-\alpha)}{\tan(-2\pi-\alpha)}-\frac{\sin(-\alpha-2\pi)\cdot\cos(-\alpha)}{\tan(-\alpha)}.$$

解：原式 $=\frac{\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)}{\tan(-\alpha)}-\frac{\sin(-\alpha)\cdot\cos\alpha}{-\tan\alpha}$

$$=\frac{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{-\tan\alpha}-\frac{-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{-\tan\alpha}$$

$$=0.$$

练 习

1. 求下列三角函数值：

(1) $\tan\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)$； (2) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$； (3) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$；

(4) $\cos(-420°)$； (5) $\tan(-750°)$； (6) $\sin\left(-\dfrac{73\pi}{6}\right)$.

2. 化简：

(1) $\dfrac{\tan(-60°)}{\tan 420°}+\tan 300°\cdot\tan(-660°)$；

(2) $\cos^2(-\alpha)+\sin(-\alpha)\cdot\cos(2\pi+\alpha)\cdot\tan(-\alpha)$.

2. $\pi\pm\alpha$ 的三角函数

在学习了 $-\alpha$ 角的三角函数后，我们可以用同样的方法来推导 α 与 $\pi\pm\alpha$的三角函数之间的关系.

试一试

在单位圆中，画出角 $\pi+\alpha$ 与角 α，观察角 $\pi+\alpha$ 的终边与角 α 的终边有什么对称关系？

在单位圆中，设角 α 的终边与单位圆的交点为 $P(x, y)$，角 $\pi+\alpha$ 的终边与单位圆交于点 P'，不难发现，点 P 与点 P'关于原点成中心对称，所以 P'的坐标为 $(-x, -y)$，如图 5－16 所示.

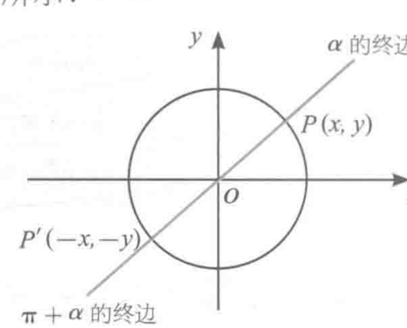


图 5－16

因为 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，

而 $\sin(\pi+\alpha)=-y$，

$\cos(\pi+\alpha)=-x$，

因此，$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$，

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$，

$$\tan(\pi+\alpha)=\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\tan\alpha.$$

归纳上述各式，得到一组公式——**公式三**：

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

想一想

在单位圆中，角 $\pi-\alpha$ 的终边与角 α 的终边有什么对称关系？

在单位圆中，设角 α 的终边与单位圆的交点为 $P(x, y)$，角 $\pi-\alpha$ 的终边与单位圆交于点 P'，不难发现，点 P 与点 P' 关于 y 轴对称，所以 P' 的坐标为 $(-x, y)$，如图 5－17 所示.

因为 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，

而 $\sin(\pi-\alpha)=y$，

$\cos(\pi-\alpha)=-x$，

因此，$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，

$$\tan(\pi-\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha.$$

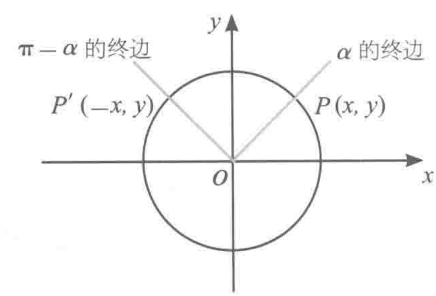


图 5－17

归纳上述各式，得到一组公式——**公式四**：

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

例4 求下列各三角函数值：

（1）$\sin\frac{7\pi}{6}$；（2）$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$；（3）$\tan(-120°)$.

解：（1）$\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$；

（2）$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(3) $\tan(-120°)=-\tan120°=-\tan(180°-60°)=\tan60°=\sqrt{3}$.

例5 化简：

$$\frac{\tan(\pi-\alpha)}{\tan(2\pi-\alpha)\cdot\cos^2(\pi-\alpha)}-\frac{\tan(\alpha+\pi)\cdot\sin(-\alpha+\pi)}{\cos(-\alpha+2\pi)}.$$

解：原式 $=\dfrac{-\tan\alpha}{\tan(-\alpha)\cdot(-\cos\alpha)^2}-\dfrac{\tan\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos(-\alpha)}$

$$=\frac{-\tan\alpha}{-\tan\alpha\cdot\cos^2\alpha}-\frac{\tan\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\tan^2\alpha$$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$=1.$$

练习

1. 不用计算器，求下列各三角函数值：

(1) $\sin\dfrac{5\pi}{6}$； (2) $\cos\dfrac{4\pi}{3}$； (3) $\tan240°$.

2. 不用计算器，填写下表：

α	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\tan\alpha$									

3. 化简：

(1) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(-\alpha)\cdot\tan(\pi+\alpha)}$；

(2) $\dfrac{\cos(360°-\alpha)\cdot\tan(180°+\alpha)}{\sin(180°-\alpha)}$.

习题 五

1. 求下列各三角函数值：

(1) $\tan 300°$；　(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$；　(3) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$；

(4) $\cos(-240°)$；　(5) $\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$；　(6) $\tan\frac{41\pi}{6}$.

2. 设 A，B，C 是一个三角形的三个内角，求证：

(1) $\cos(A+B)=-\cos C$；

(2) $\sin(2A+2B)=-\sin 2C$；

(3) $\cos(2A+2B)=\cos 2C$.

3. 化简：

(1) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\cdot\tan(2\pi-\alpha)}$；

(2) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\tan\alpha$；

(3) $\sin\theta\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta}+\cos\theta\cdot\sqrt{1-\sin^2\theta}$（$\theta$ 为第三象限的角）；

(4) $1+\sin(\alpha-2\pi)\cdot\sin(\pi+\alpha)-2\cos^2(-\alpha)$.

5.7 正弦函数的图像和性质

1. 正弦函数的图像

从前面的学习中我们已经看到三角函数值具有“周而复始”的变化规律. 三角函数的图像是如何反映这种变化规律呢?

本节我们先利用“描点法”画出正弦函数在相应区间上的简图，再进一步得到正弦函数的图像——正弦曲线.

要用“描点法”比较准确地画出正弦函数在相应区间上的简图，列表是关键. 我们先用“描点法”作 $y=\sin x$, $x\in[0, 2\pi]$ 的图像.

(1) 列表:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y=\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

(2) 描点.

(3) 连线:

用一条光滑的曲线把所描的点依次连结起来就画出了 $y=\sin x$, $x\in[0, 2\pi]$的图像，如图 5－18.

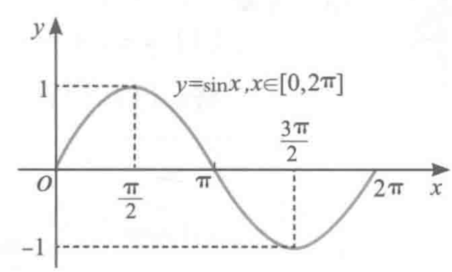


图 5－18

因为终边相同的角的三角函数值相等，所以正弦函数 $y=\sin x$ 在 $x\in[-2\pi, 0]$, $x\in[2\pi, 4\pi]$, $x\in[4\pi, 6\pi]$, …时的图像，与 $x\in[0, 2\pi]$时的图像的形状完全一样，只是位置不同，因此只需把 $y=\sin x$, $x\in[0, 2\pi]$的图像向左和向右平行移动 2π, 4π, …个单位，就可以得到正弦函数 $y=\sin x$, $x\in\mathbf{R}$ 的图像，如图 5－19.

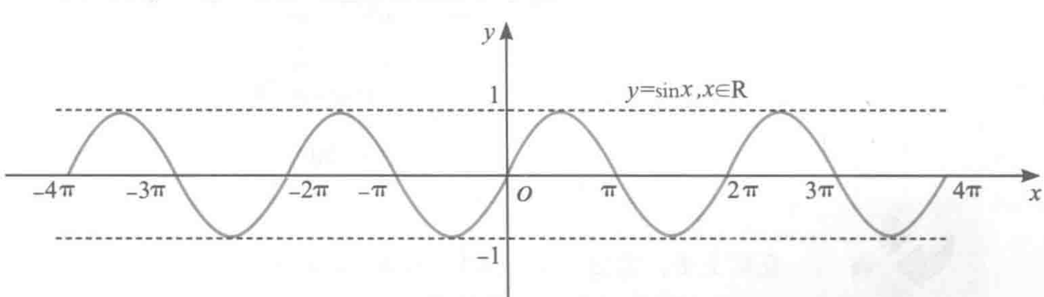


图 5－19

试一试

观察图 5－18，你能否找出确定正弦函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 图像大致形状的关键点？并写出它们的坐标吗？

观察正弦函数图像，不难看出，正弦函数图像中 $(0,0)$，$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，$(\pi,0)$，$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$，$(2\pi,0)$ 这五个点是确定正弦函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$图像的大致形状的关键点．

就是说，把这五个关键点描出后，函数图像的大致形状就基本确定了．因此，在精确度要求不高时，可先描出这五个关键点，再用平滑的曲线将它们连结起来，就可以得到相应区间上的正弦函数的简图．这种近似的画正弦函数简图的方法叫做“**五点法**”，这种方法简单易行．

例1 用“五点法”画出下列函数的简图：

（1）$y=1+\sin x$，$x\in[0,2\pi]$；（2）$y=-\sin x$，$x\in[0,2\pi]$．

解：（1）列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=1+\sin x$	1	2	1	0	1

描点画图，如图 5－20.

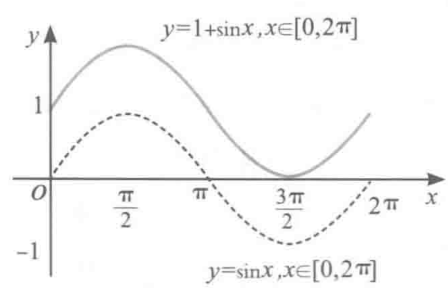


图 5－20

议一议

观察上图，说出函数 $y=1+\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图像与函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图像之间的关系．

（2）列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=-\sin x$	0	-1	0	1	0

描点画图，如图 5－21.

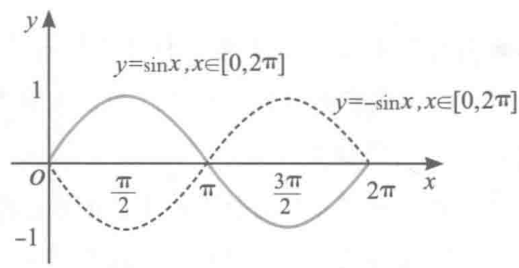


图 5－21

议一议

观察上图，说出函数 $y=-\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图像与函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图像之间的关系.

练习

用“五点法”画出下列函数的简图：

（1）$y=1-\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$；　　（2）$y=2\sin x-1$，$x\in[0,\ 2\pi]$.

数学实验　利用几何画板绘制正弦函数图像

三角函数在数学中是很重要的．利用几何画板可以准确绘制出正弦函数的图像，从而可以使我们更好的认识和了解三角函数．具体操作如下：

1. 新建一个几何画板文件．

2. 选择“图表”—“新建函数”命令，在弹出的对话框中选择“函数”下拉菜单下的“sin”，再选择“x”．如图 5－22 所示．点击“确定”即可．

图 5－22

3. 在绘图区的左侧会出现如下图所示的字样．

$$\boxed{fx = \sin x}$$

4. 选中上图字样，选择“图表”—“绘制函数”命令，我们就可以看到图像．如图 5－23 所示．

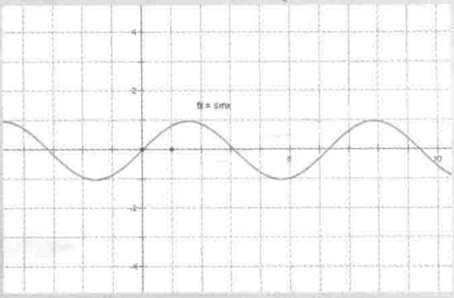


图 5－23

5. 选择“文件”下拉菜单中的“保存”即可．

按照上述方法，我们就可以做出多种三角函数图形．

2. 正弦函数的性质

由正弦函数 $y=\sin x$ 的图像可以知道:

(1) 定义域

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域是 **R**.

(2) 值域

正弦函数 $y=\sin x$, $x\in\mathbf{R}$ 的值域是 $[-1, 1]$, 即对任意的 $x\in\mathbf{R}$, 都有 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$.

其中, 当 $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ 时, 有 $y_{\max}=1$;

当 $x=-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ 时, 有 $y_{\min}=-1$.

学习小贴示

"max" 是英文 "maximum" 在数学中的缩写, 是 "最大值的" 或 "最大" 的意思;

"min" 是英文 "minimum" 在数学中的缩写, 是 "最小值的" 或 "最小" 的意思.

想一想 等式 $2\sin x=3$, $\sin^2 x=\frac{1}{2}$, $\sin x=\sqrt{2}$ 都成立吗? 为什么?

例2 求出下列函数的最大值和最小值:

(1) $y=1-\sin x$; (2) $y=2\sin x$.

解: (1) 当 $\sin x=-1$ 时, $y_{\max}=1-(-1)=2$;

当 $\sin x=1$ 时, $y_{\min}=1-1=0$.

(2) 当 $\sin x=1$ 时, $y_{\max}=2\times 1=2$;

当 $\sin x=-1$ 时, $y_{\min}=2\times(-1)=-2$.

想一想 第 (1) 题中的函数 $y=1-\sin x$ 取得最大值和最小值时, 对应的 x 的取值集合分别是什么?

(3) 周期性

一般地, 对于函数 $y=f(x)$, 如果存在一个不为零的常数 T, 使得对于函数定义域内的任意 x, 等式 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立, 那么称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**. 其中, 常数 T 叫做该函数的**周期**. 如果这样的常数 T 中存在一个最小的正数, 那么这个最小的正数叫做该函数的**最小正周期**.

观察函数 $y=\sin x$ 的图像, 我们发现正弦函数的函数值按照一定的规律重复出现. 由公式 $\sin(2k\pi+x)=\sin x$ ($k\in\mathbf{Z}$) 也可以得到证实. 因此,

正弦函数 $y=\sin x$ 是周期函数，它的周期不止一个，如 2π，4π，6π，…以及 -2π，-4π，-6π，…. 事实上，任何一个常数 $2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$，$k\neq0$）都是它的周期，显然，它的最小正周期是 2π. 今后谈到三角函数的周期时，都是指它们的最小正周期.

（4）奇偶性

观察正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图像，我们发现它的图像关于坐标原点对称. 由诱导公式二 $\sin(-x)=-\sin x$ 也可以知道，正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 是奇函数.

（5）单调性

观察正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图像可以看出：当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时，曲线逐渐上升，即 $\sin x$ 由 -1 增大到 1；当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，曲线逐渐下降，即 $\sin x$ 由 1 减小到 -1. 具体变化如下表所示：

x	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$
$y=\sin x$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

议一议 正弦函数有多少个单调区间?

因此，由正弦函数的周期性可得到如下结论：正弦函数 $y=\sin x$，在每一个闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）上，函数值都从 -1 增大到 1，是增函数；在每一个闭区间 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）上，函数值都从 1 减小到 -1，是减函数.

例3 比较下列各对正弦值的大小：

（1）$\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)$ 与 $\sin\left(-\frac{\pi}{14}\right)$；　　（2）$\sin\frac{3\pi}{4}$ 与 $\sin\frac{4\pi}{5}$.

解：（1）$\because -\frac{\pi}{15}$，$-\frac{\pi}{14}\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，且 $-\frac{\pi}{15}>-\frac{\pi}{14}$，

又 $\because y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数，

$\therefore \sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)>\sin\left(-\frac{\pi}{14}\right)$.

（2）$\because \frac{3\pi}{4}$，$\frac{4\pi}{5}\in\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$，且 $\frac{3\pi}{4}<\frac{4\pi}{5}$，

又$\because y=\sin x$ 在$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$上是减函数，

$\therefore \sin\frac{3\pi}{4}>\sin\frac{4\pi}{5}$.

试一试 请你利用计算器比一比上述各对正弦值的大小.

练习

1. 求出下列函数的最大值和最小值：

（1）$y=3+\sin x$；（2）$y=-4\sin x$.

2. 观察正弦曲线，写出满足下列条件的 x 的区间：

（1）$\sin x>0$；（2）$\sin x<0$.

3. 利用正弦函数的单调性，比较下列各对正弦值的大小，并用计算器加以验证：

（1）$\sin 190°$与 $\sin 200°$；（2）$\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$与 $\sin\left(-\frac{\pi}{11}\right)$.

习题 六

1. 画出下列函数在 $[0, 2\pi]$ 上的简图：

（1）$y=1-2\sin x$；（2）$y=\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}$.

2. 求下列函数的最大值和最小值：

（1）$y=3-4\sin x$；（2）$y=2\sin x-1$.

3. 判断下列函数的奇偶性，并说明理由：

（1）$y=3\sin 2x$；（2）$y=\left|\sin\frac{x}{3}\right|$；（3）$y=3\sin x+1$.

4. 确定下列函数的定义域：

（1）$y=\frac{1}{\sin x}$；（2）$y=\frac{1}{1+\sin x}$；（3）$y=\sqrt{-\sin x}$.

5. 根据函数的单调性，比较下列各组中两个三角函数值的大小：

（1）$\sin 112°$与 $\sin 126°$；（2）$\sin\frac{35\pi}{9}$与 $\sin\left(-\frac{20\pi}{9}\right)$；

（3）$\sin\frac{17\pi}{9}$与 $\sin\frac{9\pi}{8}$.

5.8 余弦函数的图像和性质

1. 余弦函数的图像

对于余弦函数的图像——余弦曲线，我们同样可以利用“五点法”先作出 $y=\cos x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的简图，如图 5－24.

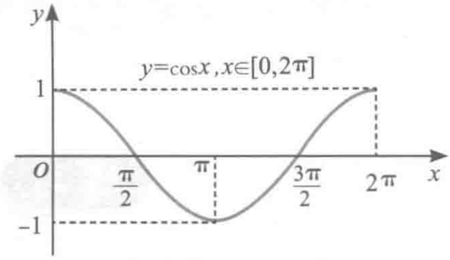


图 5－24

将 $y=\cos x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的图像向左和向右平行移动 2π，4π，…个单位，就可以得到余弦函数 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图像，如图 5－25.

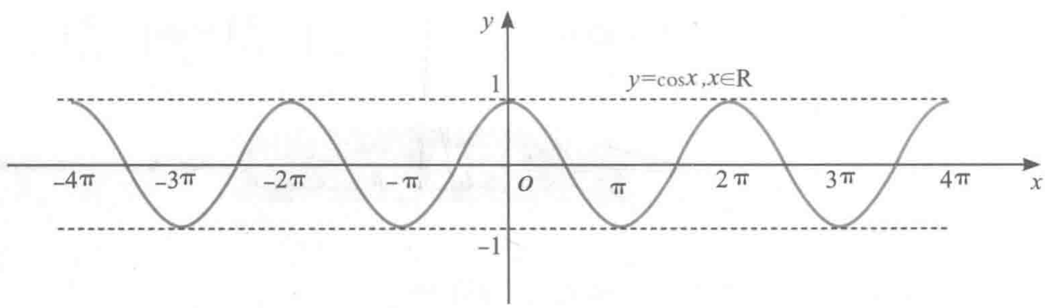


图 5－25

试一试

观察图 5－24，你能否找出确定余弦函数 $y=\cos x$，$x\in[0, 2\pi]$ 图像大致形状的关键点？并写出它们的坐标吗？

观察余弦函数图像，不难看出，余弦函数图像中 $(0, 1)$，$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$，$(\pi, -1)$，$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$，$(2\pi, 1)$ 这五个点是确定余弦函数 $y=\cos x$，$x\in[0, 2\pi]$ 图像的大致形状的关键点.

想一想

仔细观察 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图像，想想它们有什么相同点和不同点，它们的图像之间有什么关系？

例1 用“五点法”画出函数 $y=-\cos x$，$x\in[0,2\pi]$ 的简图.

解：列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=-\cos x$	-1	0	1	0	-1

描点画图，如图 5-26.

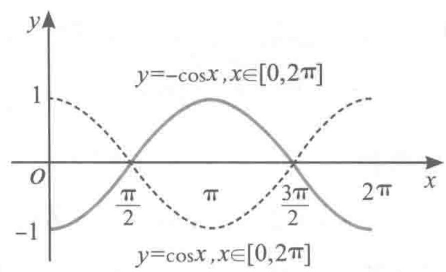


图 5-26

议一议

观察上图，说出函数 $y=-\cos x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图像与函数 $y=\cos x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图像之间的关系.

练习

用“五点法”画出函数 $y=1+\cos x$，$x\in[0,2\pi]$ 的简图.

2. 余弦函数的性质

议一议

对比正弦函数性质的研究，我们应该研究余弦函数的哪些性质？怎样研究？

由余弦函数 $y=\cos x$ 的图像可以知道：

(1) 定义域

余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

（2）值域

余弦函数 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 的值域是 $[-1,1]$，即对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$.

其中，当 $x=k\cdot 2\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，有 $y_{\max}=1$；当 $x=\pi+k\cdot 2\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，有 $y_{\min}=-1$.

想一想 等式 $3\cos x=4$，$\cos x=\sqrt{2}$ 是否成立，为什么？

（3）周期性

因为 $\cos(x+k\cdot 2\pi)=\cos x$ $(k\in\mathbf{Z})$，所以余弦函数 $y=\cos x$ 是周期函数，$2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z},\ k\neq 0)$ 是它的周期，显然，它的最小正周期是 2π.

（4）奇偶性

观察余弦函数 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图像，我们发现它的图像关于 y 轴对称. 由诱导公式二 $\cos x=\cos(-x)$，可以得出余弦函数 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 是偶函数.

（5）单调性

由余弦函数 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图像及其周期性可得到如下结论：余弦函数 $y=\cos x$，在每一个闭区间 $[(2k-1)\pi,2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上，函数值都从 -1 增大到 1，是增函数；在每一个闭区间 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上，函数值都从 1 减小到 -1，是减函数.

例2 求函数 $y=2-\cos x$ 的最大值与最小值.

解： 当 $\cos x=-1$ 时，$y_{\max}=2-(-1)=3$；

当 $\cos x=1$ 时，$y_{\min}=2-1=1$.

例3 比较下列各对余弦值的大小：

（1）$\cos\frac{\pi}{7}$ 与 $\cos\frac{\pi}{8}$；　　（2）$\cos\frac{5\pi}{4}$ 与 $\cos\frac{6\pi}{5}$.

解：（1）$\because \frac{\pi}{7},\ \frac{\pi}{8}\in[0,\pi]$，且 $\frac{\pi}{7}>\frac{\pi}{8}$，

又 $\because$ $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上是减函数，

$\therefore$　$\cos\frac{\pi}{7}<\cos\frac{\pi}{8}$.

（2）$\because \frac{5\pi}{4},\ \frac{6\pi}{5}\in[\pi,2\pi]$，且 $\frac{5\pi}{4}>\frac{6\pi}{5}$，

又∵ $y=\cos x$ 在 $[\pi, 2\pi]$ 上是增函数，

∴ $\cos\frac{5\pi}{4}>\cos\frac{6\pi}{5}$.

试一试 请你利用计算器比一比上述各对余弦值的大小.

练习

1. 求出下列函数的最大值和最小值：

(1) $y=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\cos x$; (2) $y=\sqrt{2}\cos x$.

2. 利用余弦函数的单调性，比较下列各对余弦值的大小：

(1) $\cos198°$ 与 $\cos199°$; (2) $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$ 与 $\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)$.

习题 七

1. 画出下列函数在 $[0, 2\pi]$ 上的简图：

(1) $y=\frac{5}{2}\cos x-1$; (2) $y=-2\cos x+\frac{1}{2}$.

2. 求下列函数的最大值和最小值：

(1) $y=5\cos x-4$; (2) $y=1-\cos x$.

3. 判断下列函数的奇偶性，并说明理由：

(1) $y=3\cos x-1$; (2) $y=\sin x\cdot\cos x$.

4. 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1+\cos x}$; (2) $y=\frac{1}{\sqrt{-2\cos x}}$.

5. 根据函数的单调性，比较下列各组中两个三角函数值的大小：

(1) $\cos160°$ 与 $\cos170°$; (2) $\cos\frac{19\pi}{9}$ 与 $\cos\frac{9\pi}{8}$.

5.9 利用计算器求角度

前面我们解决了求任意一个角（它属于所求函数的定义域）的三角函数值的问题. 本节我们要解决的是相反的问题，即已知一个未知角的某一个三角函数值，如何利用计算器求出符合条件的角. 下面举例说明.

例1 已知 $\cos x = -0.7660$，且 $x \in [0°, 180°]$，求 x.（精确到度）

解： 由余弦函数在闭区间 $[0°, 180°]$ 上是减函数和 $\cos x = -0.7660$，可知符合条件的角只有一个，这个角为钝角.

将计算器设置于“Deg”状态，依次按键：[SHIFT] [cos] [(−)] 0 [·] 7660 [)] [=]，

计算器显示

若保留两位小数，按键：[SHIFT] [MODE] [6] [2]，

计算器显示

若想将十进制度数转换为度分秒表示，按 [°′″] 键，

计算器显示

即 $\cos 140° \approx -0.7660$，所以 $x \approx 140°$.

例2 已知 $\sin x = -0.3322$，且 $x \in [-90°, 90°]$，求 x.（精确到秒）

解： 将计算器设置于“Deg”状态，依次按键：[SHIFT] [sin] [(−)] 0 [·] 33 22 [)] [=] [°′″]，

计算器显示

可得 $x \approx -19°24'8.5''$.

例3 已知 $\tan x = \frac{1}{3}$，且 $x \in (-90°, 90°)$，求 x.（精确到秒）

解： 将计算器设置于“Deg”状态，输入格式设置为“Math”，依次

按键：SHIFT tan ▭ 1 ▽ 3 ▷) = °′″，

计算器显示

可得 $x \approx 18°26'5.82''$.

练习

利用计算器，求下列各题中的角 x.

1. 已知 $\sin x = 0.2526$，且 $x \in [-90°, 90°]$，求 x.（精确到度）

2. 已知 $\cos x = -0.3988$，且 $x \in [0°, 180°]$，求 x.（精确到秒）

3. 已知 $\tan x = -\frac{2}{7}$，且 $x \in (-90°, 90°)$，求 x.（精确到秒）

习题 八

利用计算器，求下列各题中的角 x.

1. 已知 $\sin x = -0.7826$，且 $x \in [-90°, 90°]$，求 x.（精确到秒）

2. 已知 $\cos x = 0.4986$，且 $x \in [0°, 180°]$，求 x.（精确到度）

3. 已知 $\tan x = -\frac{3}{4}$，且 $x \in (-90°, 90°)$，求 x.（精确到秒）

5.10 已知三角函数值求指定范围内的角

对于已知一个未知角的某一个三角函数值，求出符合条件的角这一问题，除了前面介绍的利用计算器解决以外，我们还可以利用特殊角的三角函数值以及相应的诱导公式进行解决.

例1 已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，且 $0\leqslant\alpha<2\pi$，求 α.

解：$\because \sin\alpha=\frac{1}{2}>0$ 且 $\sin\alpha\neq 1$,

$\therefore \alpha$ 是第一、第二象限内的角.

又 $0\leqslant\alpha<2\pi$,

$\therefore 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

由 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，得 $\alpha=\frac{\pi}{6}$；

由 $\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，得 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$.

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$.

例2 已知 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，且 $0\leqslant\alpha<2\pi$，求 α.

解：$\because \cos\alpha=\frac{1}{2}>0$ 且 $\cos\alpha\neq 1$,

$\therefore \alpha$ 是第一、第四象限内的角.

又 $0\leqslant\alpha<2\pi$,

$\therefore 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

由 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，得 $\alpha=\frac{\pi}{3}$；

由 $\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，得 $\alpha=\frac{5\pi}{3}$.

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$.

例3 已知 $\tan\alpha=1$，且 $0\leqslant\alpha<2\pi$，求 α.

解：$\because \tan\alpha=1>0$,

$\therefore \alpha$ 是第一、第三象限内的角.

又 $0\leqslant\alpha<2\pi$,

$\therefore 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 或 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

由 $\tan\frac{\pi}{4}=1$，得 $\alpha=\frac{\pi}{4}$；

由 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$，得 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$.

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}$.

练习

1. 已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $0\leqslant\alpha<2\pi$，求 α.

2. 已知 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 $0\leqslant\alpha<2\pi$，求 α.

3. 已知 $\tan\alpha=\sqrt{3}$，且 $0\leqslant\alpha<2\pi$，求 α.

习题 九

1. 已知 α 是锐角，求下列各式中的角 α：

（1）$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$；（2）$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$；（3）$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. 已知$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求下列各式中的角 α：

（1）$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$；（2）$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$；（3）$\tan\alpha=-1$.

3. 在$\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A=\frac{1}{2}$，求$\angle A$.

4. 在$\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A=\frac{1}{2}$，求$\angle A$.

5. 已知 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$-\pi\leqslant\alpha<\pi$，求 α.

6. 根据下列条件，求出 $0\sim2\pi$ 之间的角 α：

（1）$\sin\alpha=-\frac{1}{2}$；（2）$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$；（3）$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

归纳与总结

1. 知识要点

(1) 与角 α 终边相同的角的集合是 $S=$________________.

(2) 我们规定：________________叫做 1 弧度的角，弧度制与角度制的换算关系：$180°=$______弧度.

(3) 设角 α 终边上的任意一点 P 的坐标为 (x, y)，则 $r=$______，

$\sin\alpha=$______，$\cos\alpha=$______，$\tan\alpha=$______.

(4) 任意角的三角函数值的符号：

当 α 的终边在________________________时，$\sin\alpha$ 为正；

当 α 的终边在________________________时，$\cos\alpha$ 为正；

当 α 的终边在________________________时，$\tan\alpha$ 为正 .

(5) 特殊角的三角函数值：

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$				
$\cos\alpha$				
$\tan\alpha$				

(6) 同角三角函数的基本关系式：

①____________；②____________.

(7) 四组诱导公式：

①$\sin(2k\pi+\alpha)=$______，$\cos(2k\pi+\alpha)=$______，$\tan(2k\pi+\alpha)=$______；

②$\sin(-\alpha)=$______，$\cos(-\alpha)=$______，$\tan(-\alpha)=$______；

③$\sin(\pi+\alpha)=$______，$\cos(\pi+\alpha)=$______，$\tan(\pi+\alpha)=$______；

④$\sin(\pi-\alpha)=$______，$\cos(\pi-\alpha)=$______，$\tan(\pi-\alpha)=$______.

(8) 正弦函数、余弦函数的主要性质：

三角函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$
定义域		
值域	$y\in$______， 当 $x=$______时， 有 $y_{max}=1$， 当 $x=$______时， 有 $y_{min}=-1$.	$y\in$______， 当 $x=$______时， 有 $y_{max}=1$， 当 $x=$______时， 有 $y_{min}=-1$.
单调性	在区间______上是增函数， 在区间______上是减函数.	在区间______上是增函数， 在区间______上是减函数.
奇偶性		
周期性	$T=$______	$T=$______

2. 重点与难点

本单元学习的重点是三角函数的概念、同角三角函数的基本关系式、正弦函数的图像和性质、利用计算器求任意角三角函数值及已知三角函数值求角的问题. 难点是弧度制、周期的概念及综合应用三角公式进行化简.

学习本单元的内容需要注意理解以下几方面的问题:

(1) 设 α 终边上的任意一点 P 的坐标为 (x, y), 则它与原点的距离为 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ $(r>0)$, 我们定义角 α 的三角函数如下:

角 α 的正弦　$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$,

角 α 的余弦　$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$,

角 α 的正切　$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$.

其中, 对于 $\tan\alpha$ 来说, x 不能为零, 即 α 的终边不能在 y 轴上, 所以 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

对于每一个确定的角 α, 都分别有唯一确定的正弦值、余弦值、正切值与之对应, 所以这三个对应法则都是以角 α 为自变量的函数, 分别叫做角 α 的正弦函数、余弦函数和正切函数.

(2) 根据三角函数的定义, 可以得到下列同角三角函数的基本关系式:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

上面的关系式是恒等式, 即当 α 取使关系式两边都有意义的任意值时, 关系式两边的值相等.

(3) 正弦函数 $y=\sin x$, $x\in\mathbf{R}$ 的图像, 如图 5-27 所示.

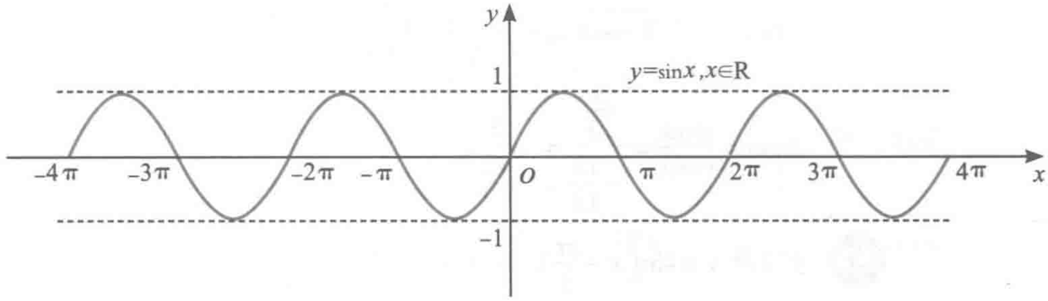


图 5-27

正弦函数图像中 $(0, 0)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$, $(\pi, 0)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$, $(2\pi, 0)$ 这五个点是确定正弦函数 $y=\sin x$, $x\in[0, 2\pi]$ 图像的大致形状的关键点.

正弦函数 $y=\sin x$ 的主要性质有:

① 定义域: $x\in\mathbf{R}$.

② 值域: $y\in[-1, 1]$.

当 $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，有 $y_{\max}=1$；当 $x=-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，有 $y_{\min}=-1$.

③周期性：最小正周期是 2π.

④奇偶性：奇函数，其图像关于原点中心对称.

⑤单调性：在每一个闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）上，都是增函数；在每一个闭区间 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）上，都是减函数.

（4）利用具有函数功能的计算器，可以方便、快速、准确地求出任意角的三角函数值. 但要注意的是如果三角函数是用角度表示的，计算时应将计算器置于 Deg（以度为单位的计算）状态；如果三角函数是用弧度表示的，计算时应将计算器置于 Rad（以弧度为单位的计算）状态进行计算.

（5）对于已知一个未知角的某一个三角函数值，求出符合条件的角这一问题，可以利用特殊角的三角函数值以及相应的诱导公式进行解决.

例1 已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，求 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

解： $\because \sin\alpha=\frac{5}{13}>0$，$\therefore \alpha$ 是第一、二象限的角，

若 α 是第一象限的角，$\cos\alpha>0$，

$$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13},$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}=\frac{5}{12}.$$

若 α 是第二象限的角，$\cos\alpha<0$，

$$\therefore \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13},$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}.$$

例2 求函数 $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})$ 的单调递增区间.

解: 令 $z=x-\frac{\pi}{3}$，函数 $y=\sin z$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

由 $$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi，得$$

$$-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

因此，函数 $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

综合练习 五

A 组

1. 填空题：

（1）$\sin^2 40° + \cos^2 40° =$ ________；

（2）$\sin^2 400° + \cos^2 40° =$ ________；

（3）$\cos\dfrac{3\pi}{4} - \cos\dfrac{5\pi}{4} + \cos\dfrac{7\pi}{4} =$ ________.

2. 判断题：

（1）400°角是锐角；（　　）

（2）$\cos 2 > 0$.（　　）

3. 选择题：

（1）若 $\alpha = 100°$，则 $k \cdot 360° - \alpha$（$k \in \mathbf{Z}$）所在的象限是（　　）；

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

（2）已知 $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$，$\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$，则 $\tan\alpha =$（　　）；

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. $-\dfrac{3}{4}$　　D. $-\dfrac{4}{3}$

（3）角 $-330°$ 与下列哪个角的终边相同（　　）；

A. 330°　　B. 30°　　C. $-30°$　　D. $-390°$

（4）下列四个命题中正确的是（　　）.

① $y = \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上是增函数

② $y = \sin x$ 在第一象限是减函数

③ $y = \cos x$ 在 $[-\pi, 0]$ 上是增函数

④ $y = \cos x$ 在第一象限是减函数

A. ①②　　B. ①③　　C. ②③　　D. ③④

4. 写出与下列各角终边相同的角的集合：

（1）$\dfrac{\pi}{3}$；　（2）$-\dfrac{5\pi}{6}$；　（3）$\dfrac{19\pi}{4}$；　（4）$-213°15'$.

5. 已知扇形的圆心角是 54°，半径是 24cm，求这个扇形的弧长.

6. 确定下列各三角函数值的符号：

（1）$\sin 3$；　（2）$\cos 6$；　（3）$\tan 320°$；　（4）$\sin\dfrac{21\pi}{4}$.

7. （1）已知 $\sin\theta = -\dfrac{3}{4}$，且 θ 是第四象限角，求 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$；

（2）已知 $\tan\theta = 3$，且 θ 是第三象限角，求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$；

(3) 已知 $\cos\theta=\frac{1}{3}$，求 $\sin\theta$ 和 $\tan\theta$；

(4) 已知 $\sin x=2\cos x$，求角 x 的三个三角函数值.

8. 画出下列函数在 $[0, 2\pi]$ 上的简图：

(1) $y=1-\frac{1}{2}\sin x$； (2) $y=3\cos x-1$.

9. 在区间 $[0, 2\pi)$ 上，求适合下列条件的角 x：

(1) $\sin x=-\frac{1}{2}$； (2) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$； (3) $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

10. 利用计算器求下列三角函数值：

(1) $\sin 368°34'$； (2) $\cos(-167°)$；

(3) $\tan 3.6$； (4) $\sin\frac{5\pi}{7}$.

11. 求下列函数的最大值、最小值，并且求使函数取得最大、最小值的 x 的集合：

(1) $y=2\sin x-3$； (2) $y=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}$.

B 组

1. 选择题：

(1) 若 $\sqrt{1-\sin^2 x}=-\cos x$，则角 x 在第（ ）象限；

A. 一、二 B. 三、四 C. 一、四 D. 二、三

(2) 若 $\tan\alpha=2$，且 $\sin\alpha<0$，则 $\cos\alpha=$（ ）；

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{1}{5}$ D. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

(3) 化简 $\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\tan x}\right)\cdot(1-\cos x)=$（ ）.

A. $\cos x$ B. $\sin x$ C. $1+\cos x$ D. $1+\sin x$

2. 在 $0°\sim360°$ 之间，找出与下列各角终边相同的角，并分别指出它们是第几象限角：

(1) $-428°$； (2) $1234°56'$.

3. 根据下列条件，确定 θ 角所在的象限：

(1) $\sin\theta>0$ 且 $\tan\theta>0$； (2) $\sin\theta\cdot\cos\theta>0$.

4. 求证：

(1) $2(1-\sin x)\cdot(1+\cos x)=(1-\sin x+\cos x)^2$；

(2) $\sin^2 x+\sin^2 y-\sin^2 x\cdot\sin^2 y+\cos^2 x\cdot\cos^2 y=1$.

5. 化简：$\dfrac{\sqrt{1-2\sin20°\cdot\cos20°}}{\cos160°+\sqrt{1-\cos^2 160°}}$.

6. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，计算：

（1）$\dfrac{4\sin\alpha-\cos\alpha}{5\cos\alpha+2\sin\alpha}$；（2）$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$；（3）$\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

7. （1）已知 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{2}{5}$，求 $\tan\alpha$；

（2）已知 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{2}{5}$，且 $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，求 $\tan\alpha$.

8. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，计算：

（1）$\sin(4\pi+\alpha)$；（2）$\cos(5\pi-\alpha)$；（3）$2-\cos^2\alpha$.

9. 下列结论是否成立？为什么？

（1）$\sin^2 x=1.2$；（2）$3\cos x=\sqrt{2}$；（3）$\sin x=\dfrac{2}{3}$，且 $\cos x=\dfrac{1}{3}$.

10. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=x^4-\cos x$，$x\in\mathbf{R}$；（2）$y=|3\sin x|+2$，$x\in\mathbf{R}$；

（3）$y=x^2\cdot\sin x$，$x\in\mathbf{R}$.

阅读空间

七巧板上的数学

——三角函数公式的推导

“七巧板”是我国民间很早就流行的一种拼图游戏，有人叫它智慧板．它是用一块正方形的木板或厚纸裁成七块而制成的．用这七块板可以拼成各种形式．

受我国民间“七巧板”的启发，我国当代数学家赵访熊先生依据直角三角形性质及三角函数的性质设计出“三角七巧板”．

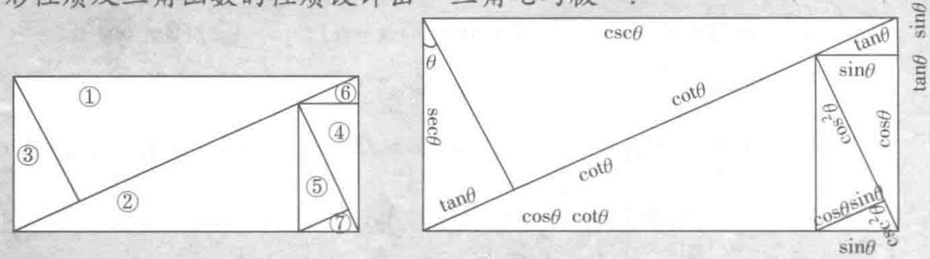


图 5－28

在一张长方形的纸板上，如图 5－28 所示剪出七个直角三角形，这就是“三角七巧板”．可以发现，这七个直角三角形都是相似的．

设定标号③的直角三角形中较小的锐角为 θ，较长的直角边长度为 1．

由 $\sin\theta=\dfrac{\theta\text{ 的对边}}{\theta\text{ 的斜边}}$，$\cos\theta=\dfrac{\theta\text{ 的邻边}}{\theta\text{ 的斜边}}$，$\tan\theta=\dfrac{\theta\text{ 的对边}}{\theta\text{ 的邻边}}$，$\cot\theta=\dfrac{\theta\text{ 的邻边}}{\theta\text{ 的对边}}$，$\csc\theta=\dfrac{\theta\text{ 的斜边}}{\theta\text{ 的对边}}$，$\sec\theta=\dfrac{\theta\text{ 的斜边}}{\theta\text{ 的邻边}}$可以将七个直角三角形的每条边用三角函数表示出来．

（1）观察④⑤⑦组成小矩形的对角线有：

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

（2）利用①③拼成的直角三角形，由相似三角形的性质可得：

$$\frac{\tan\theta}{1}=\frac{1}{\cot\theta}=\frac{\sec\theta}{\csc\theta}.$$

（3）利用③④拼成的直角三角形，由相似三角形的性质可推得公式：

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\tan\theta}{\sin\theta}.$$

（4）利用①④拼成的图形，由相似三角形的性质可推得公式：

$$\csc\theta=\frac{\cot\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}.$$

同学们可以自己动脑动手尝试拼出各种不同的图形，发现新的三角函数公式．

附录 1

科学计算器功能介绍

计算器是一种运算准确，使用方便的计算工具，大家在数学学习过程中已经深有体会．为了更加便于大家掌握本教材使用的卡西欧 $fx-82$ES型科学计算器，现对该型号计算器的主要功能及使用方法作以介绍．

一 基本操作介绍

1．开机

在关机状态下，按下 ON 此键，此时计算器进入运算模式．

＊注意：在开始运算前观察显示屏最上一行的符号显示，认清计算器所处的模式状态．避免出现错误．

显示举例：

此指示符	表　示
S	通过按下 SHIFT 键，键盘进入转换键功能．当您按下任一键时，所有键盘会解除转换，而此指示符会消失．
A	按下 ALPHA 键，会进入字母输入模式．当您按下任一键时，会退出字母输入模式，而此指示符会消失．
M	有一个存贮在独立存储器内的数值．
STO	计算器正在等待输入一个变量名称，以便为此变量指定一个数值．在您按下 SHIFT RCL（STO），出现此指示符．
RCL	计算器正在等待输入一个变量名称，以便检索此变量的数值．在您按下 RCL 之后，出现此指示符．
STAT	计算器处于 STAT 模式．
D	预设角度单位为度数．
R	预设角度单位为度弧度．
G	预设角度单位为百分度．
FIX	固定位数的小数位数有效．
SCI	固定位数的有效位数有效．
Math	数学样式被选定为输入/输出格式
▼▲	可提供并重现计算历史存储数据，或者在现有屏幕之上或之下还有更多的数据．
Disp	显示屏目前显示多语句表达式的中间结果．

2. 关机

在开机状态下，先按第二功能键，在按按键（OFF），显示屏显示消失，计算器处于关机状态.

＊如果连续6分钟内没有任何操作，计算器也会自动关闭电源.

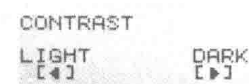
3. 计算器的初始化

当您想初始化计算器时，执行列步骤即可. 计算器的计算模式与设置将会返回至初始设置.

SHIFT 9 (CLR) 3 (All) = (Yes)

＊注意：此项操作将会消除目前计算器存储器内的所有数据.

4. 调节显示对比度



5. 清除

在计算器运行过程中按下按 ON 键或者按 AC 键，均可清除显示屏所显示的算式和结果.

但两个按键执行后的结果各不相同.

①按键 ON 不但可以清除显示屏显示的算式与结果，同时清除存储器的重现内容.

②按键 AC 只清除显示屏显示的算式与结果，不会清除存储器的重现内容.

③一般情况下，一道题目完成后，不按按键，直接输入下一道题目也能将前一道题目的算式和结果从显示屏清除，并且同时将上一道题目的算式和结果储存在存储器中，按按键可以重现上次运算的算式和结果.

6. 重现与回查

CASIO fx－82 ES具有重现与回查功能. 每当执行计算时，重现功能将会将算式和计算结果自动保存在重现存储器中，每当需要调用时，只需利用按▲、▼、◀与▶键，就可调出前面的算式，可以直接进行修改.

＊重现存储器的容量有限. 每当重现存储器存满，将从最先存入的算式进行清除..

7. 输入数字或者运算符号

①按键上的标记指示该键输入值或者它所能执行的功能.

②按下 SHIFT 或者 ALPHA，接着按下第二键，将会执行第二键的第二功能. 该按键上方的印刷文字表示了该按键的第二功能. 如图所示：

$\sin^{-1}$ D —— 第二功能

按键功能 —— sin

③第二功能键的不同颜色的文字含义表示如下：

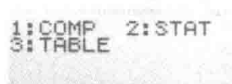
按键标记文字的颜色	它表示
黄色	按下 SHIFT 键，然后按下此键，即可实现本应用键的功能.
红色	按下 ALPHA 键，然后按下此键，即可实现本应用键的功能.

8. 修改

如果需要删除一个数字，可将光标移到准备删除的数字然后按 DEL 按键，光标所指的数字将被删除.

9. 计算模式的选取

①按下 MODE ，显示模式菜单

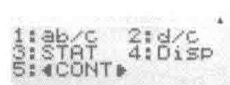


②按下与您想要选择模式相对应的数字键.

序　　号	模　　式
1 COMP	常规运算模式
2 STAT	统计模式
3 TABLE	函数列表模式

10. 计算器的设定

按下 SHIFT MODE （SETUP）会显示设定菜单.



11. 指定输入/输出格式

有关输入/输出格式	执行此键操作
数学格式（Math）	SHIFT MODE 1 （MthIO）
线性格式（Linear）	SHIFT MODE 2 （LineIO）

*数学格式产生分数、无理数和其他表达式，如同教科书上一样的显示.

二　基本计算示例

1. 实数及其运算

这里的所有计算用“一般计算”（COMP）模式，将计算器调整到 MODE 1 .

进行实数运算时，为了显示包括$\sqrt{2}$、π 等形式的计算结果，选取“数学模式（Math）”依次按键 SHIFT MODE 1 ，即进入了“数学模式”. 如果显示小数，可用 S⇔D 键来切换.

［分数、小数的四则运算］

例1 计算$\frac{3}{4}\times(2.5-\frac{1}{4})+\frac{5}{12}\div0.25$.

解：按 $\frac{\square}{\square}$ 3 ▽ 4 ▷ × (2.5 −

【$\frac{\square}{\square}$】【1】【▽】【4】【▷】【)】【+】

【$\frac{\square}{\square}$】【5】【▽】12【▷】【÷】0.25【=】，显示答案$\frac{161}{48}$.

再按【SHIFT】【S⇔D】切换成带分数$3\frac{17}{48}$.

$\therefore \frac{3}{4}\times(2.5-\frac{1}{4})+\frac{5}{12}\div 0.25=\frac{161}{48}=3\frac{17}{48}$.

[整数指数幂]

利用幂次键【$x^{\blacksquare}$】可作幂的运算，操作顺序是：底数【$x^{\blacksquare}$】指数【=】. 如果计算平方和立方可以在底数输入后直接按【x^2】或【x^3】键.

例2 计算：(1) $(-1.5)^3$；(2) $(-\frac{2}{3})^4$.

解：(1) 按【(】【(−)】1.5【)】【x^3】【=】，显示答案$-\frac{27}{8}$，如再按【S⇔D】切换成小数 −3.375.

$\therefore (-1.5)^3=-\frac{27}{8}=-3.375$.

(2) 按【(】【(−)】【$\frac{\square}{\square}$】【2】【▽】【3】【▷】【)】【$x^{\blacksquare}$】【4】【=】，显示答案$\frac{16}{81}$.

$\therefore \left(-\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$.

[分数指数幂]

例3 计算：(1) $4^{\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{1}{3}}$；(2) $(6^{\frac{3}{4}}\times 4^{\frac{1}{3}})^2$（保留三位小数）.

解：(1) 先按【SHIFT】【MODE】【6】(Fix)【3】

(1) 按【4】【$x^{\blacksquare}$】【$\frac{\square}{\square}$】【2】【▽】【3】【▷】【▷】【×】【5】【$x^{\blacksquare}$】【$\frac{\square}{\square}$】【1】【▽】【3】【=】，显示答案 4.309.

$\therefore 4^{\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{1}{3}}\approx 4.309$.

(2) 按【(】【6】【$x^{\blacksquare}$】【$\frac{\square}{\square}$】【3】【▽】【4】【▷】【▷】【×】【4】【$x^{\blacksquare}$】【$\frac{\square}{\square}$】【1】【▽】【3】【▷】【▷】【)】【x^2】【=】，显示答案 37.034.

[实数的四则运算]

例4 计算 $2\sqrt{6}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{4}{\sqrt{3}}$（保留三位有效数字）.

解：先设定保留三个有效数字的格式，按键：【SHIFT】【MODE】【7】(SCI)【3】

再按【2】【$\sqrt{\blacksquare}$】【6】【▷】【+】【$\frac{\square}{\square}$】【3】【−】【$\sqrt{\blacksquare}$】【5】【▷】【▽】【2】【▷】【−】【$\frac{\square}{\square}$】

4 ▽ √■ 3 =，显示答案 2.97.

$\therefore 2\sqrt{6}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{4}{\sqrt{3}}\approx 2.97.$

2. 函数

在函数内容的学习中，如果已知函数解析式 $y=f(x)$，可利用计算器的生成数字表格功能，在其定义域上取一组数，就能得到一组相应的函数值，这样方便了描点画函数的图像中的列表．反过来，如果已知某种函数图像上的若干个点，能利用计算器求的这个函数的解析式．

例5 在平面直角坐标系 xOy 上已知六个点的坐标分别为（0，99），（10，105）（20，113），（30，118），（40，123），（50，131），试求关于这些点的直线型经验公式．

解： 应用计算器的一次回归功能，求 $y=A+Bx$ 中的系数 A、B. 先进入 STAT 模式，再输入数据．

按 MODE 2 2

0 = 10 = 20 = 30 = 40 = 50 =

移动光标到表示 y 下的第一行，继续按

99 = 105 = 113 = 118 = 123 = 131 = AC

输出系数 A、B，按

SHIFT 1 7 1 =，显示 A = 99. 19047619；

SHIFT 1 7 2 =，显示 B = 0. 6257142857.

$\therefore$ 所求的直线型经验公式为 $y=0.6257x+99.19$.

3. 三角函数计算

这部分的计算均以 COMP 模式中的数字格式进行，运算时，先按 MODE 1 SHIFT MODE 1.

[角度互化]

计算器在设定菜单中（SHIFT MODE）可以在三种方式中选定其中一种来预设角度单位，见下表：

将此设定为预设角度单位	执行此键操作
角度	SHIFT MODE 3 (Deg)
弧度	SHIFT MODE 4 (Rad)
百分度	SHIFT MODE 5 (Gra)

其中，$90°=\frac{\pi}{2}$ 弧度 = 100 百分度．

例6 将67°30′化成弧度（精确到0.001）：

解：首先，将角度单位设置为“弧度”，即 Rad 状态，按键 SHIFT MODE 4；

其次，将结果的精确度设置为小数点后3位，按键 SHIFT MODE 6 3.

按 (67 °′″ 30 °′″) SHIFT Ans 1 =，显示答案1.178.

∴ 67°30′≈1.178.

例7 将3.14换算成角度（用度数表示，精确到0.001）.

解：首先将角度单位设置为“度”，即 Deg 状态，按键 SHIFT MODE 3.

按3.14 SHIFT Ans 2 =，显示答案179.909.

∴ 3.14≈179.909.

[已知三角函数值求角]

例8 已知 $\sin\alpha=0.6217$，求锐角 α（精确到1″）.

解：按 SHIFT sin（$\sin^{-1}$）0.6217 =，显示38.440 38403，

再按 SHIFT °′″，显示38°25′25.38″.

∴ $\alpha\approx 38°25'25.38''$.

4. 统计初步

进行统计计算，均在 STAT 模式下进行，应先把计算器设定到 MODE 2 (STAT)，再按键 1 表示在菜单中选择单一变量的项目（1－VAR）.

[平均数和方差]

例9 运动员甲进行了5次射击，成绩（环）为：9.7，10，9.6，9.8，9.9，求甲的射击成绩的平均数和方差分别是多少？

解：按 MODE 2 (STAT) 1 9.7 = 10 = 9.6 = 9.8 = 9.9 = AC

再按 SHIFT 1 5 2 =，显示平均数 $\bar{x}=9.8$，

SHIFT 1 5 3 =，显示标准差 $s=0.1414213562$，

x^2 =，显示方差 $s^2=0.02$.

答：甲的射击成绩的平均数是9.8环，方差为0.02.

附录 2

常用数学符号

符号	应用	意义或读法	备注
$\in$	$x \in A$	x 属于 A，x 是集合 A 的一个元素	
$\notin$	$x \notin A$	x 不属于 A，x 不是集合 A 的一个元素	
$\{,\cdots,\}$	$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$	诸元素 x_1，x_2，…，x_n 组成的集合	
$\{\mid\}$	$\{x \mid p(x)\}$	具有特征性质 $p(x)$ 的诸元素组成的集合	
ϕ		空集	
N		非负整数集，自然数集	
N^*，N_+		正整数集	
Z		整数集	
Q		有理数集	
R		实数集	
$\subseteq$	$B\subseteq A$	B 是 A 的子集	也可以用 $\subset$
$\subsetneqq$	$B\subsetneqq A$	B 是 A 的真子集	
$\not\subseteq$	$B\not\subseteq A$	B 不是 A 的子集	
$\cap$	$A\cap B$	A 与 B 的交集	既属于集合 A，又属于集合 B 的诸元素组成的集合
$\cup$	$A\cup B$	A 与 B 的并集	属于 A 或属于 B 或属于两者的诸元素组成的集合
$\complement$	$\complement_U B$	U 中子集合 B 的补集	
$\Rightarrow$	$p\Rightarrow q$	推出符号	p 是 q 的充分条件
$\Leftarrow$	$p\Leftarrow q$	推出符号	p 是 q 的必要条件
$\Leftrightarrow$	$p\Leftrightarrow q$	等价符号	p 是 q 的充要条件
$\sin x$		角 x 的正弦	
$\cos x$		角 x 的余弦	
$\tan x$		角 x 的正切	
$\log_a x$		以 a 为底 x 的对数	
$\lg x$		以 10 为底的对数，常用对数	$\lg x = \log_{10} x$
$\ln x$		以 e 为底的对数，自然对数	$\ln x = \log_e x$
~	$a \sim b$	数字范围	a 和 b 为不相同的实数，例如 5～10 表示由 5 至 10
Σ	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$	

责任编辑 张 程
封面设计 李建章

语文出版社

中等职业教育课程改革国家规划新教材

语文（基础模块）上册
语文（基础模块）下册
语文（职业模块 · 工科类）
语文（职业模块 · 服务类）
语文（拓展模块）

数学（基础模块）上册
数学（基础模块）下册
数学（职业模块 · 工科类）
数学（职业模块 · 服务类）
数学（拓展模块）

英语（基础模块）上册
英语（基础模块）下册
英语（职业模块 · 工科类）
英语（职业模块 · 服务类）
英语（拓展模块）

物理（机械建筑类）

ISBN 978-7-80241-231-6
9 787802 412316 >
定价：18.00元

[General Information]
书名=14144257
SS号=14144257