2021 年
全国教师资格证考试
考前内部资料

【初高中 数学学科】

必背考点

目 录

第一部分 高中基础知识

一、函数的基本性质

1.函数的单调性：

（1）确定单调区间的方法：（1）定义法；（2）导数法；（3）图象法。

（2）复合函数 $y=f\left[g\left(x\right)\right]$ 在公共定义域上的单调性：同增异减。

2.函数的奇偶性：（1）偶函数：$f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，图象关于 y 轴对称；（2）奇函数：$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，图象关于原点对称。

3.周期性：$f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$，$T$ 叫作这个函数的一个周期。

4.对称性：$f\left(a+x\right)=f\left(a-x\right)\Leftrightarrow f\left(2a-x\right)=f\left(x\right)\Leftrightarrow$ 函数 $f\left(x\right)$ 关于直线 $x=a$ 对称。

5.函数的凹凸性：①凸：$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$；②凹 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$。

二、数学归纳法

数学归纳法证明命题的步骤：

（1）证明当 n 取第一个值 $n_0\left(n_0=\mathbf{N}^*\right)$ 时命题 $p\left(n_0\right)$ 成立；

（2）假设 $n=k\left(k\geq n，k\in\mathbf{N}^*\right)$ 时，命题 $p\left(k\right)$ 成立，证明当 $n=k+1$ 时命题 $p\left(k+1\right)$ 也成立；

由（1）、（2）就可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立。

第二部分　大学基础知识

一、极限与连续

1.求极限的方法：

（1）最高次幂法：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}，& 当n=m，\\ 0，& 当n>m，\\ \infty，& 当n<m。\end{cases}$

（2）两个重要极限公式：（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{v\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=\mathrm{e}$。

（3）常用等价无穷小：当 $x\to 0$ 时的等价无穷小量，则有 $\sin x\sim x$；$\tan x\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$\arctan x\sim x$；$\mathrm{e}^{x}-1\sim x$；$\ln(1+x)\sim x$；$(1+x)^{2}-1\sim 2x$；$1-\cos x\sim\frac{x^{2}}{2}$；$a^{x}-1\sim x\ln a$。

（4）洛必达法则：（1）法则 1（$\frac{0}{0}$ 型）；（2）法则 2（$\frac{\infty}{\infty}$ 型）。

2.函数在一点的连续

$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处既是左连续，又是右连续。

二、导数与微分

1.导数的应用

（1）切线方程：$y=f(x)$ 在点 $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$。

（2）法线方程：$y=f(x)$ 在点 $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 处的法线方程为 $y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。

（3）求函数单调性：（1）$f'(x)>0$，单调递增；（2）$f'(x)<0$，单调递减。

（4）函数的极值与最值。

2.微分中值定理

（1）罗尔定理（Rolle 定理）

若函数 $f(x)$ 满足：①在闭区间 $[a, b]$ 上连续；②在开区间 (a, b) 内可导；③ $f(a)=f(b)$，则在 (a, b) 内至少有一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

（2）拉格朗日中值定理（Lagrange 中值定理）

设函数 $f(x)$ 满足：①在闭区间 $[a, b]$ 上连续；②在开区间 (a, b) 内可导；则在 (a, b) 内至少有一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

（3）柯西中值定理

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：①在闭区间 $[a, b]$ 上皆连续；②在开区间 (a, b) 内皆可导且 $g'(x)\neq 0$。则存在 $\xi\in(a, b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\ (a<\xi<b)$。

三、级数

1.幂级数的收敛半径

设极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中 a_n，a_{n+1} 是幂级数相邻两项的系数，则①若 $\rho\neq 0$，则 $R=\dfrac{1}{\rho}$；②若 $\rho=0$，则 $R=+\infty$；③若 $\rho=+\infty$，则 $R=0$。

2.常见函数幂级数展开式

（1）$e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\cdots$，$x\in\mathbf{R}$

（2）$\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5-\cdots$，$x\in\mathbf{R}$

（3）$\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+\cdots$，$x\in\mathbf{R}$

（4）$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$，$x\in(-1,1)$

（5）$\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots$，$x\in(-1,1)$

（6）$\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\cdots$，$x\in(-1,1]$

（7）$\ln(1-x)=-x-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3-\cdots$，$x\in[-1,1)$

（8）$\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5-\cdots$，$x\in[-1,1]$

四、行列式和矩阵

1.行列式的计算

（1）二阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

（2）三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}。$$

2.代数余子式法：将行列式按某一行（或列）展开，达到降阶的目的。

3.求逆矩阵：$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。

4.齐次线性方程组的解有两种情况：（1）只有零解；（2）有非零解。

5. n 元非齐次线性方程组有解的充分必要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$ 的秩。当 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=n$ 时，方程组没有自由未知量，只有唯一解。当 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=r<n$ 时，方程组有 $n-r$ 个自由未知量，有无穷多个解。

五、二次型

（一）正定的：$a_{11}>0$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$，…，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$。

（二）负定的：$a_{11}<0$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$，…，$(-1)^n\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$。

六、空间向量的向量积

1.两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积（外积）是一个向量 $\boldsymbol{c}$，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模是 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角。

$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面（即 $\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$，又垂直于 $\boldsymbol{b}$），$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定。

2.向量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\boldsymbol{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\boldsymbol{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$。

七、空间线面及其方程

1.几种特殊的二次曲面：①椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；②椭圆抛物面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$；③双曲抛物面（鞍形曲面）：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$。④单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$。⑤双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$。

2.空间平面及其方程：①点法式方程：$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$；②一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$。

3.空间直线及其方程：①点向式方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$；②参数方程：$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$，$t$ 为参数；③一般式方程：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$。

第三部分 数学教学知识

1.数学学科核心素养包括：**数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析**。这些数学学科核心素养既相对独立、又相互交融，是一个有机的整体。

2.四基：基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验；四能：发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力。

3.评价的原则：①重视学生数学学科核心素养的达成；②重视评价的整体性与阶段性；③重视过程评价；④关注学生的学习态度。

4.中学数学教学过程要处理好以下几种关系：①间接经验和直接经验的关系；②数学知识技能的掌握与能力发展的关系；③数学知识技能的掌握和数学观形成的关系；④数学认知活动与非认知因素的关系；⑤教师主导作用与学生主体性的关系。

5.中小学数学教学的一些基本原则：①抽象与具体相结合的原则；②严谨性与量力性相结合的原则；③培养“双基”与策略创新相结合的原则；④精讲多练与自主建构相结合的原则。

6.常用的教学方法：①讲授法；②谈话法；③讲练结合法；④自学辅导法；⑤发现法；⑥小组教学法；⑦探究性数学教学；⑧情境教学法。

7.学习概念主要有**概念形成**与**概念同化**两种基本形式。

8.概念之间的关系分为：**相容关系**和**不相容关系**。其中相容关系包括同一关系，交叉关系，从属关系，不相容关系包括矛盾关系和对立关系。

9.常见数学定义的方法

（1）原始概念；（2）**属加种差定义**：**发生式定义**和**关系定义法**是比较特殊的两种定义方法；（3）外延定义法；（4）词语定义法；（5）递归定义法。

10.中学常见的数学思想：符号思想、集合思想、**数形结合思想**、**函数与方程思想**、**转化与化归思想**、分类与整合思想、特殊与一般思想、有限与无限思想、或然与必然思想、归纳思想、类比思想、演绎思想、模型思想等。

11.教学设计

（1）课题；（2）课时；（3）课型；（4）教材分析；（5）学情分析；（6）教学目标；（7）教学重难点；（8）教学方法；（9）课前准备；（10）教学过程：①导入；②新授；③巩固；④小结；⑤作业；（11）板书设计；（12）教学反思。